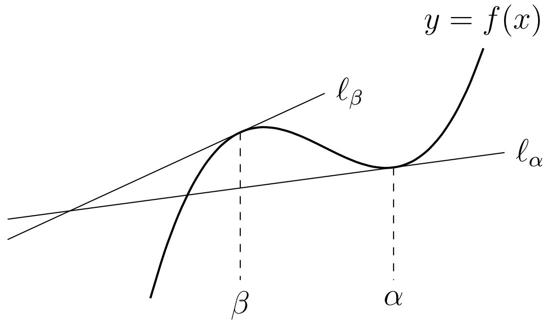
接線と接線の交点（積分を用いた表し方）

曲線 $y = f(x)$ の 2 本の接線の交点の座標について次が成り立つ．

命題. 曲線 $y = f(x)$ 上の異なる 2 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ における接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とし，この 2 接線が交点を持つとする．このとき，交点の x 座標は，積分を用いて，

$$x = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta t f''(t)\ dt}{\displaystyle\int_\alpha^\beta f''(t)\ dt}$$



と表せる．

証明. 2 接線 ℓ_α, ℓ_β の方程式はそれぞれ，

$$\ell_\alpha \ : \ y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$
$$\ell_\beta \ : \ y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta)$$

と書ける．交点を持つという仮定から，$f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ なので，y を消去することにより，

$$f(\beta) - f(\alpha) = -\left(f'(\beta) - f'(\alpha)\right)x + \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha)$$
$$\left(f'(\beta) - f'(\alpha)\right)x = \beta f'(\beta) - f(\beta) - \left(\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)\right) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，2 つの定積分

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f''(t)\ dt &= \Big[f'(t)\Big]_\alpha^\beta \\ &= f'(\beta) - f'(\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta t f''(t)\ dt &= \Big[t f'(t)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(t)\ dt \\ &= \Big[t f'(t) - f(t)\Big]_\alpha^\beta \\ &= \beta f'(\beta) - f(\beta) - \left(\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)\right)\end{aligned}$$

の計算結果を用いることにより，等式 (1) は，

$$\left(\int_\alpha^\beta f''(t)\ dt\right)x = \int_\alpha^\beta t f''(t)\ dt$$

と変形できる．これから主張が従う． □

注意. 上の公式は，その見た目の形は複雑であるが，計算が楽に行えるという利点がある．これは，2 次導関数を用いているため，$f(x)$ の次数が 2 下がることと，定数項と 1 次の項を無視することができるからである．

………………………………………………………………………………

例. 放物線の 2 接線の交点の x 座標が，2 接点の x 座標の平均になっていることを確認しよう．放物線 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ の 2 接線 ℓ_α, ℓ_β の交点の x 座標は，上の公式から，

$$x = \frac{\int_\alpha^\beta 2at\ dt}{\int_\alpha^\beta 2a\ dt} = \frac{[at^2]_\alpha^\beta}{[2at]_\alpha^\beta} = \frac{a(\beta^2 - \alpha^2)}{2a(\beta - \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

と計算できる．よって結果が従う．