



共通部分と和集合と補集合

集合と集合の共通部分や和集合について定義する.

定義. 集合 A, B に対して,

- A と B のどちらにも属する要素全体の集合を, A と B の共通部分 といい, $A \cap B$ と表す. すなわち,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である.

- A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を, A と B の和集合 といい, $A \cup B$ と表す. すなわち,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

である.

例. 3つの集合 A, B, C を

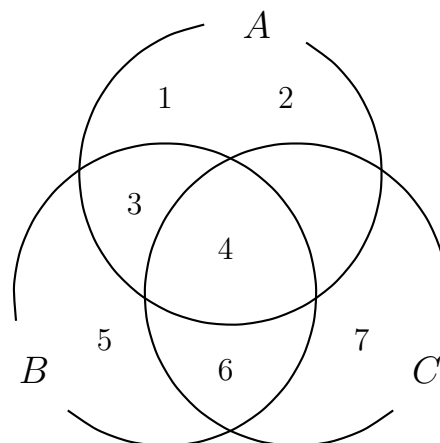
$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{4, 6, 7\}$$

と定めるとき, 次が成り立つ.

- $A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

これらを用いて,
3つの集合の共通部分や和集合も求められる.

- $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$
 $= \{3, 4\} \cap \{4, 6, 7\} = \{4\}$
- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{4, 6, 7\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



注意. 上の例では, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ¹が成り立つので, はじめから括弧を付けずに, $A \cap B \cap C$ と表すことができた. しかし, 共通部分の記号 $\cap$ と和集合の記号 $\cup$ が混在している場合は, この法則 (結合法則) が成り立たないことに注意する.

例えば, 上の例の集合 A, B, C を用いて,

$$(A \cap B) \cup C = \{3, 4\} \cup \{4, 6, 7\} = \{3, 4, 6, 7\}$$

であるが,

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4\}$$

なので, $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$ である. よって, この場合は括弧を外して $A \cap B \cup C$ と書く事はできない.

¹結合法則という.

次に全体集合と補集合を定義する．これまでのように集合を考える場合，まず全体集合というものを設定して，その集合の中で，それぞれの集合を考えることが多い．

定義．1つの集合 U を定めて，その部分集合として様々な集合を考えるとき，この U を全体集合という．

補足．例えば， $x^2 = 3$ の解全体の集合 A を考える．

- 全体集合 U を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ としている場合は， $A = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ であるが，
- 全体集合 U を整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ としている場合は， $A = \emptyset$ （空集合）である．

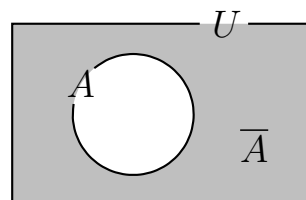
このように，厳密な議論を進める上では，全体集合を明記することが大切である．

全体集合に対して，次のように補集合というものを定めることができる．

定義．全体集合 U の部分集合 A に対して， U の要素であって， A の要素ではないもの全体の集合²を U に関する A の補集合といい， $\bar{A}$ と表す．

すなわち，

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\} \\ &= \{x \in U \mid x \notin A\}\end{aligned}$$



である．（どちらで書いても良い．）

補足．全体集合を明記したい場合は， $\bar{A}$ を $U \setminus A$ などと表すこともある．

例．全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，その2つの部分集合を

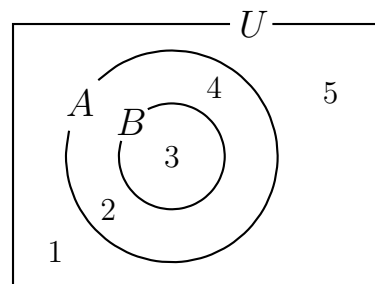
$$A = \{2, 3, 4\}, B = \{3\}$$

と定める．（ $B \subset A \subset U$ である．）このとき次が成り立つ．

- $\bar{A} = U \setminus A = \{1, 5\}$
- $\bar{B} = U \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$

次のように，全体集合を A とみて， A に関する B の補集合を考えることもできる．

- $A \setminus B = \{2, 4\}$



最後に補集合の性質についてまとめておく．

補集合の性質

U を全体集合とし， A, B をその部分集合とすると，次が成り立つ．

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = U$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $B \subset A \Rightarrow \bar{B} \supset \bar{A}$

証明．はじめの2つは明らかである．3つ目について， $\overline{\bar{A}}$ は $\bar{A}$ の補集合であるから，これも明らかである．

4つ目を示す． $B \subset A$ を仮定する．このとき，全ての $x \in \bar{A}$ に対して， $x \in \bar{B}$ が成り立つことを示せば良い． $x \in \bar{A}$ をとると， $x \notin A$ が成り立つ．仮定より $B \subset A$ なので， $x \notin B$ が成り立つ．よって， $x \in \bar{B}$ が従う．³ □

²言い換えると， U に属しているが， A に属さない要素全体の集合．

³対偶法が使えるなら， $y \in B \Rightarrow y \in A$ から， $y \notin A \Rightarrow y \notin B$ が従うので，これから結果を得ることもできる．