区間縮小法

有界な単調数列の収束性[1] を仮定して，次の定理を証明する．

定理 (区間縮小法)**.** 自然数 n に対して，閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ が，$I_{n+1} \subset I_n$ を満たすとする．このとき，全ての区間 I_n に含まれる実数が存在する．すなわち，全ての I_n の共通部分を I とすると，

$$I \neq \emptyset$$

が成り立つ．さらに，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，

$$I = \{\alpha\}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

が成り立つ．

証明. 仮定 $I_{n+1} \subset I_n$ より，任意の自然数 n に対して，$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ が成り立つので，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列であり，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列なので，これらは収束する．そこで，それぞれの極限値を

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n = \beta$$

とおく[2]．全ての自然数 n に対して，$a_n \leq b_n$ が成り立つので，極限の性質[3] から，

$$\alpha \leq \beta$$

が成り立つ．また，全ての自然数 n に対して，

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \tag{1}$$

が成り立つので，$[\alpha, \beta] \subset I_n$ が成り立つ．よって，$\emptyset \neq [\alpha, \beta] \subset I$ が従う．

さらに，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ を仮定すると，(1) から，$\alpha = \beta$ である[4]．よって，

$$\{\alpha\} = [\alpha, \beta] \subset I$$

が成り立つ．$c \in I$ とすると，全ての自然数 n に対して

$$c \in I \subset I_n = [a_n, b_n]$$

となるので，$a_n \leq c \leq b_n$ が成り立つ．よって，はさみうちの原理[5] から，

$$c = \alpha$$

となり，$I = \{\alpha\}$ が従う． $\square$

---

[1] 上に（下に）有界な単調増加（減少）数列は収束する．極限値は，その数列の上限（下限）である．

[2] $\sup a_n$ は数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限（最小上界），$\inf b_n$ は数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下限（最大下界）を表す．

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であり，全ての自然数 n に対して，$a_n \leq b_n$ なら，$\alpha \leq \beta$ が成り立つ．

[4] $\alpha \neq \beta$ とすると，(1) から，$\dfrac{\beta - \alpha}{2} > 0$ であり，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ から，$\varepsilon = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ に対して，ある自然数 N が存在して，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，$| b_n - a_n | < \varepsilon$ が成り立つが，これは，(1) から，

$$0 < b_n - a_n < \varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} \leq \frac{b_n - a_n}{2} \quad \Longrightarrow \quad b_n - a_n < 0$$

となり矛盾である．

[5] $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であり，全ての自然数 n に対して，$a_n \leq c_n \leq b_n$ なら，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ が成り立つ．