冪自然数列の k 階差数列

任意の自然数 k に対して，自然数を k 乗した数列 $\{a_n\}$：

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \cdots$$

を考える．すなわち，数列 $\{a_n\}$ は，一般項が，

$$a_n = n^k$$

で与えられる数列である．自然数 l に対して，数列 $\{a_n\}$ の l 階差数列を $\{a_n^{(l)}\}$ を

$$a_n^{(l)} = a_{n+1}^{(l-1)} - a_n^{(l-1)}$$

によって定める．ここで，便宜上 $a_n^{(0)} := a_n$ としている．

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots \quad a_n,\quad a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\quad \cdots$$

$$a_1^{(1)},\quad a_2^{(1)},\quad a_3^{(1)},\quad a_4^{(1)},\quad \cdots \quad a_n^{(1)},\quad a_{n+1}^{(1)},\ a_{n+2}^{(1)},\ a_{n+3}^{(1)},\quad \cdots$$

$$a_1^{(2)},\quad a_2^{(2)},\quad a_3^{(2)},\quad a_4^{(2)},\quad \cdots \quad a_n^{(2)},\quad a_{n+1}^{(2)},\ a_{n+2}^{(2)},\ a_{n+3}^{(2)},\quad \cdots$$

このとき，次が成り立つ．

命題. 任意の自然数 n に対して，

$$a_n^{(k)} = k!$$

が成り立つ．すなわち，自然数を k 乗した数列の k 階差数列は，定数列 $k!$ である．

証明. 数列 $\{a_n\}$ の k 階差数列 $\{a_n^{(k)}\}$ の一般項は，補題 1 から，

$$\begin{aligned} a_n^{(k)} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} (n+i)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^{k-j} i^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^{k-j} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^j \end{aligned}$$

と計算できる．ここで，自然数 l に対して，和 $T(l,j)$ を

$$T(l,j) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} i^j \tag{1}$$

で定めると，$a_n^{(k)}$ は，

$$a_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^{k-j} T(k,j)$$

と書けるが，これは，補題 2 から，

$$a_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^{k-j} T(k,j) + T(k,k) = k!$$

と計算できる．よって，主張が従う． □

補題 1. 一般の数列 $\{a_n\}$ に対して，その l 階差数列 $\{a_n^{(l)}\}$ を上のように定める．このとき，

$$a_n^{(l)} = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} a_{n+i}$$

が成り立つ．ここで，$\displaystyle\binom{l}{i} = \frac{l!}{i!(l-i)!}$ は二項係数である．

証明．l に関する帰納法で証明する．$i = 1$ のときは，定義から明らかである．帰納法の仮定から，

$$\begin{aligned}
a_n^{(l)} &= a_{n+1}^{(l-1)} - a_n^{(l-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} a_{n+1+i} - \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} a_{n+i} \\
&= a_{n+l} + \sum_{i=0}^{l-2} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} a_{n+1+i} - \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} a_{n+i} - (-1)^{l-1} a_n \\
&= a_{n+l} + \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l-1}{i-1} (-1)^{l-i} a_{n+i} + \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-i} a_{n+i} + (-1)^l a_n \\
&= a_{n+l} + \sum_{i=1}^{l-1} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} a_{n+i} + (-1)^l a_n \qquad (2) \\
&= \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} a_{n+i}
\end{aligned}$$

と計算できる．ここで (2) では二項係数の公式 $\displaystyle\binom{l}{i} = \binom{l-1}{i-1} + \binom{l-1}{i}$ を用いた． □

補題 2. 非負整数 $0 \leqq j \leqq l$ に対して，$T(l, j)$ を上の (1) で定めたものとする．このとき，

$$T(l, j) = \begin{cases} l! & (j = l) \\ 0 & (j < l) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明．$0^0 = 1,\ 0! = 1$ に注意すると，$T(0, 0) = 0!$, $T(1, 0) = 0$ が確認できる．$1 \leqq j \leqq l$ とすると，帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
T(l, j) &= \sum_{i=1}^{l} \binom{l}{i} (-1)^{l-i} i^j \\
&= l \sum_{i=1}^{l} \binom{l-1}{i-1} (-1)^{l-i} i^{j-1} \qquad (3) \\
&= l \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} (i+1)^{j-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} i^h \\
&= l \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} (-1)^{l-1-i} i^h \\
&= l \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} T(l-1, h) \qquad (4) \\
&= l T(l-1, j-1)
\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，(3) では二項係数の公式 $i\displaystyle\binom{l}{i} = l\binom{l-1}{i-1}$ を用いた．また，(4) においては帰納法の仮定を用いている．最後に，$j = l$ なら，$j-1 = l-1$ なので，このとき，再び帰納法の仮定を用いて，$T(l, j) = l \cdot (l-1)! = l!$ が従う．$j < l$ なら，$j - 1 < l - 1$ なので，このときも同様に，$T(l, j) = l \cdot 0 = 0$ が従う． □