# 絶対値の極限値

数列の極限と関数の極限の性質として，絶対値の極限値が，極限値の絶対値となることを証明する．

**命題.** $\alpha$ を実数とする．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を満たすとき，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|.$$

証明．仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N$ が存在して，

$$n > N \Longrightarrow | a_n - \alpha | < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$n > N$ である全ての自然数 $n$ に対して，

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n - \alpha) + \alpha| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon + |\alpha|, \\ |\alpha| &= |(\alpha - a_n) + a_n| \leq |\alpha - a_n| + |a_n| < \varepsilon + |a_n| \end{aligned}$$

が成り立つ．これらから，

$$-\varepsilon < |a_n| - |\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $N$ が存在して，

$$n > N \Longrightarrow | \, |a_n| - |\alpha| \, | < \varepsilon$$

が成り立つことになり，主張が従う． □

**命題.** $\alpha$ を実数とする．関数 $f(x)$ が，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を満たすとき，次が成り立つ．

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|.$$

証明．仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$0 < |x - a| < \delta$ を満たす全ての実数 $x$ に対して，

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - \alpha) + \alpha| \leq |f(x) - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon + |\alpha|, \\ |\alpha| &= |(\alpha - f(x)) + f(x)| \leq |\alpha - f(x)| + |f(x)| < \varepsilon + |f(x)| \end{aligned}$$

が成り立つ．これらから，

$$-\varepsilon < |f(x)| - |\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow | \, |f(x)| - |\alpha| \, | < \varepsilon$$

が成り立つことになり，主張が従う． □

**補足.** ほとんど同様の証明により，$x \to \pm\infty$ の場合も証明できる．