関数の極限と数列の極限の関係

実数全体の集合を $\mathbb{R}$，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す．関数 f が，実数から実数への写像[1] すなわち，

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto f(x)$$

であるのに対して，数列 a_n は，自然数から実数への写像すなわち，

$$a_n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ n\mapsto a_n$$

であると言える．単に定義域が違うというだけでなく，これらの極限の違いを意識することは重要である．例えば，関数 $f(x)$ に対して，

$$a_n=f(n)$$

で定義される数列を考える．このとき，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\quad と，\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f(n) \tag{1}$$

は，同じものであろうか．結論から言うと，一般的には違うものである．具体例は，後で紹介することにして，もう少し一般の場合を考察する．まずは，次の定理を証明する．

定理. $\alpha\in\mathbb{R}$ とする．このとき，次の 2 つは同値である．

1. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ をみたす<u>任意の</u>数列 $\{b_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=\alpha$

証明．1. $\Rightarrow$ 2. を示す．$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ を仮定する．任意に $\varepsilon>0$ をとる．仮定から，この ε に対して，ある $K>0$ が存在して，

$$x>K\Longrightarrow\mid f(x)-\alpha\mid<\varepsilon \tag{2}$$

が成り立つ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の仮定から，この K に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$n>N\ (n\in\mathbb{N})\Longrightarrow b_n>K \tag{3}$$

が成り立つ．(2)，(3) から，ε に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$n>N\ (n\in\mathbb{N})\Longrightarrow b_n>K\Longrightarrow\mid f(b_n)-\alpha\mid<\varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=\alpha$ が従う．

逆を示す．$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ をみたす任意の数列 $\{b_n\}$ に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=\alpha$ であると仮定する．さらに，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq\alpha$ を仮定する（背理法）．すなわち，次をみたす $\varepsilon_0>0$ が存在するとする：

$$\text{任意の } K>0 \text{ に対して，ある } x_K \text{ が存在して，} x_K>K \text{ かつ } \mid f(x_K)-\alpha\mid\geq\varepsilon_0 \text{ が成り立つ．} \tag{4}$$

この仮定から，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，ある x_n が存在して，$x_n>n$ をみたす[2]ので，この x_n を第 n 項とする数列 $\{x_n\}$ を考えると，$n\to\infty$ のとき，$x_n\to\infty$ なので，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ が成り立つ．よって，定理の仮定から，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$ が成り立つので，ε_0 に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$n>N\Longrightarrow\mid f(x_n)-\alpha\mid<\varepsilon_0$$

が成り立つが，これは，仮定 (4) の後半すなわち $\mid f(x_n)-\alpha\mid\geq\varepsilon_0$ に矛盾する．よって主張が従う．□

---

[1] 正確には，実数の部分集合 $I\subset\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$.

[2] 仮定 (4) における．K として，$n\in\mathbb{N}$ をとり，それに対して存在する x_K を x_n としている．

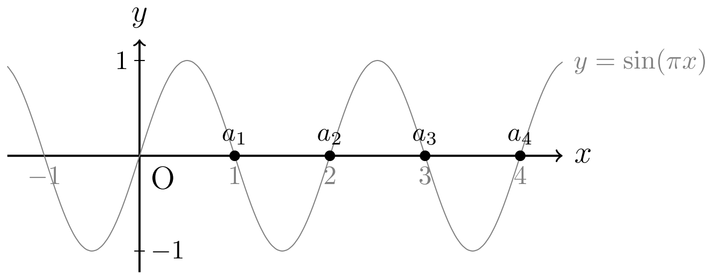
上の定理から，(1) において，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \alpha$ であっても，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ であるとは限らないことがわかる．$b_n = n$ とおくと，確かに，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ が成り立つが，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ を結論づけるためには，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ をみたす全ての数列 $\{b_n\}$ について，$\lim_{x\to\infty} f(b_n) = \alpha$ を示さなければならないのである．

次に，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在して，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在しない場合の有名な例を紹介する．

例. 関数 $f(x) = \sin(\pi x)$ に対して，数列

$$a_n = f(n) = \sin(\pi n)$$

を考える．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n = 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが，$f(x)$ は定数でない周期関数なので，$\lim_{n\to\infty} f(x)$ は存在しない．



では，$f(x)$ がどのような関数であれば，数列 $a_n = f(n)$ の収束性を調べるだけで，$x \to \infty$ での $f(x)$ の収束性を結論付けられるだろうか．言い換えると，$f(x)$ がどのような関数であれば，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \iff \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad (a_n = f(n)) \tag{5}$$

が成り立つであろうか．

上の例を見ると，予想 (5) が成り立たない要因として，$f(x)$ が周期関数であることが挙げられるように感じるが，$f(x) = x\sin(\pi x)$ とすると，これは周期関数ではないが，予想 (5) の反例となる．そこで安易に，$f(x)$ が単調関数である場合を考えてみる．すると，この場合は予想 (5) が成り立つのである．

定理. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$f(x)$ が単調関数[a]であるとする．このとき，次の 2 つは同値である．

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$
2. 数列 $b_n = n$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \alpha$

[a]単調増加または単調減少関数

証明．1. ⇒ 2. は，前の定理から従うので，2. ⇒ 1. を示す．数列 $b_n = n$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \alpha$ とする．さらに，$\lim_{x\to\infty} f(x) \neq \alpha$ を仮定する（背理法）．すなわち (4) をみたす ε_0 が成り立つと仮定する．この仮定から，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある x_n が存在して，

$$x_n > n \text{ かつ } \mid f(x_n) - \alpha \mid \geq \varepsilon_0 \tag{6}$$

が成り立つ．さらに，定理の仮定から，ε_0 に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，（$b_n = n$ に注意すると，）

$$n > N \Longrightarrow \mid f(n) - \alpha \mid < \varepsilon_0 \tag{7}$$

が成り立つ．任意の $n > N$ に対して存在する各 $x_n > n$ に対して，$n' > x_n$ をみたす $n' \in \mathbb{N}$ が取れるので，$f(x)$ が単調増加関数であるとすると，$n' > x_n > n \ (> N)$ と，(7) から，

$$f(n) \leq f(x_n) \leq f(n') \Longrightarrow -\varepsilon_0 < f(n) - \alpha \leq f(x_n) - \alpha \leq f(n') - \alpha < \varepsilon_0$$

が成り立つので，$\mid f(x_n) - \alpha \mid < \varepsilon_0$ が結論づけられるが，これは，(6) に矛盾である． □