関数の極限と数列の極限の関係（$x \to a$ の場合）

実数全体の集合を $\mathbb{R}$，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す．関数の極限と数列の極限の関係について次が成り立つ[1]．

定理． $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の 2 つは同値である．

1. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$
2. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = a$，$a_n \neq a$ をみたす任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$

証明．1. ⇒ 2. を示す．$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ を仮定する．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．仮定から，この ε に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 <| x - a |< \delta \Longrightarrow | f(x) - \alpha |< \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の仮定から，この δ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n > N \, (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow | a_n - a |< \delta, \, a_n \neq a \tag{2}$$

が成り立つ．(1)，(2) から，ε に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n > N \, (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow 0 <| a_n - a |< \delta \Longrightarrow | f(a_n) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ が従う．

逆を示す．$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = a$ をみたし，全ての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \neq a$ である任意の数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ であると仮定する．さらに，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) \neq \alpha$ を仮定する（背理法）．すなわち，次をみたす $\varepsilon_0 > 0$ が存在するとする：

任意の $\delta > 0$ に対して，ある x_δ が存在して，$0 <| x_\delta - a |< \delta$ かつ $| f(x_\delta) - \alpha |\geq \varepsilon_0$ が成り立つ．

δ は任意であるので，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\delta = \dfrac{1}{n}$ としたとき，それに応じて存在する x_δ を x_n と書き，この x_n を第 n 項とする数列 $\{x_n\}$ を考えると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，次が成り立つ．（ε_0 は固定している．）

$$0 <| x_n - a |< \frac{1}{n} \quad \text{かつ，} | f(x_n) - \alpha |\geq \varepsilon_0 \tag{3}$$

$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{n} \to 0$ なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = a$ が成り立つ．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x_n \neq a$ であるから，$\{x_n\}$ は定理の仮定を満たす数列である．よって，定理の仮定から，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ が成り立つので，（固定している）ε_0 に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n > N \Longrightarrow | f(x_n) - \alpha |< \varepsilon_0$$

が成り立つが，これは，(3) の後半すなわち $| f(x_n) - \alpha |\geq \varepsilon_0$ に矛盾する．よって主張が従う．□

---

[1] $x \to \infty$ の場合については，https://gleamath.com/lim-of-funcs-and-seqs を参照．