関数の極限

まずは，関数がある値に収束するということについて定義する．

定義. 関数 $f(x)$ において，変数 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，それに応じて，$f(x)$ の値がある一定の値 α に近づく場合，この値 α を **$x \to a$ のときの関数 $f(x)$ の極限値**または，**極限**といい，次のように表す：

$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$$

定義. ある実数 α に対して，$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ であるとき，$f(x)$ は α に**収束する**という．

注意. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ であることを，「$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ 」と表すこともある．しかしこのとき，$x \to a$ は，$x \neq a$ であるのに対し，$f(x) \to \alpha$ は，$f(x) = \alpha$ であっても良いことに注意する．例えば，定数関数 $f(x) = c$ においては，$f(x)$ の定義域に含まれる任意の実数 a に対して，$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ が成り立つ．

例. 次のように，定義域以外の点においての極限値が存在することがある．

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x - 1) = 1$$

次に関数が発散するということについて定義する．

定義. 関数 $f(x)$ において，$x \to a$ のとき，それに応じて，

- $f(x)$ の値が限りなく大きくなる場合，**$x \to a$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散する**といい，
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
と表す．これは「$x \to a$ のとき $f(x) \to \infty$ 」と表されることもある．
- $f(x)$ の値が限りなく小さくなる場合，**$x \to a$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散する**といい，
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
と表す．これは，「$x \to a$ のとき $f(x) \to -\infty$ 」と表されることもある．

例. 発散する場合の例を挙げる：

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

定義域の端での極限を考える場合など，次のように片側からの極限が必要になる．

定義. $x \to a$ について，

- a より大きい値をとりながら a に限りなく近づく場合，$x \to a + 0$,
- a より小さい値をとりながら a に限りなく近づく場合，$x \to a - 0$

と書く．特に，$a = 0$ のときは，$x \to +0$ や $x \to +0$ と書く．

関数 $f(x)$ において，$x \to a + 0$，$x \to a - 0$ のときの極限をそれぞれ，**右側極限**，**左側極限**といい，次のように表す：

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \lim_{x \to a-0} f(x).$$

注意. 関数 $f(x)$ において，右側極限と左側極限がそれぞれ存在しているが，その値が異なるとき，すなわち，$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ であるとき，$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ は存在しないという．

また，$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ であることと，$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \alpha$ であることは同じである．

$x \to \infty$ や $x \to -\infty$ についても次のように定義される.

定義. 関数 $f(x)$ において，変数 x が限りなく大きくなるとき，それに応じて，$f(x)$ の値がある一定の値 α に近づく場合，この値 α を **$x \to \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値**または，**極限**といい，

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

と表す．$x \to -\infty$ の定義も上の「限りなく大きく」を「限りなく小さく」に読み替えるだけで同様である.

さらに，「$f(x)$ の値がある一定の値 α に近づく場合」を，「$f(x)$ の値が限りなく大きく（小さく）なる場合」に読み替えることで，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

も同様に定義される.

次の結果[1] から，関数の極限と四則演算には互換性があることがわかる.

関数の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\lim_{x \to a}\{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$ （k, l は定数）
- $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$）

が成り立つ．これらは，$x \to \infty$ や，$x \to -\infty$ の場合も同様に成り立つ.

次の結果[2]は，直接極限を求めにくい関数の極限値や，その範囲を求めるのに有効である.

ある実数 α，β に対して，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ が成り立つとする．このとき，

1. a の近くの全ての x に対して，$f(x) \leq g(x) \implies \alpha \leq \beta$,
2. a の近くの全ての x に対して，$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta \implies \lim_{x \to a} h(x) = \alpha$

が成り立つ．これらは，「a の近くの全ての x に対して」を「十分大きい（小さい）x に対して」に読み替えることで，$x \to \infty$ や，$x \to -\infty$ の場合でも成り立つ.
2. については，その主張の形から，**はさみうちの原理**と呼ばれている.

注意. 上の定理において，（当然のことであるが）仮定を強めても結論の式が成り立つ．例えば，1. においては，$f(x) < g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$ が成り立つし，2. においては，$f(x) < h(x) < g(x)$ かつ $\alpha = \beta \Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ が成り立つ．さらに，次も成り立つ.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ かつ十分大きい } x \text{ に対して } f(x) \leq g(x) \implies \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

これは，あくまでイメージであるが，任意の実数より ∞ は大きいと思うと，上の定理の 1. に対応していると捉えられる.

[1]関数の極限の定義において，「限りなく近づく」と曖昧な表現が使われている．これを厳密に定義するには，$\varepsilon - \delta$ 論法と呼ばれる議論が必要になるが，残念ながら高校数学の範囲を超えてしまう．そのため，四則演算との互換性や，はさみうちの原理などの関数の極限の性質についても高校数学の範囲では厳密に証明することができない．$\varepsilon - \delta$ 論法については，https://gleamath.com/lim-epsilon-delta01/ を参照してほしい.

[2]注釈 [1] で注意したように，これについても高校数学の範囲では厳密に証明することができない．ただ関数のグラフをイメージすることで感覚的に成り立つことは理解できるだろう.