関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）定義と四則演算その１

高校数学において，関数の極限は，「限りなく近づくとき $\cdots$」のような曖昧な表現を使って定義されるのであった．これを厳密に定義すると次のようになる：

定義. 関数 $f(x)$ において，任意の正数 ε に対して，ある正数 δ が存在して，

$$0<|x-a|<\delta \text{ である全ての } x \text{ に対して，} |f(x)-\alpha|<\varepsilon \tag{1}$$

が成り立つとき，α を $x\to a$ **のときの関数** $f(x)$ **の極限値**といい，$\alpha=\lim_{x\to a}f(x)$ と表す．

注意. 上の定義において，「δ が存在して (1) 式が成り立つ」という表現は，少し聴き慣れないかもしれないが，これは，「(1) 式を満たすような δ が存在する」という意味である．つまり，関数 $f(x)$ に対して，$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ を示したいときは，(1) 式を満たすような δ の存在を言えば良いことになる．δ は，ε に寄っても良いので，$\delta=\delta(\varepsilon)$ とかかれることもある．

これから，この厳密な定義に基づいて，様々な極限の性質を証明していくが，その証明には，（定義を見てもわかるように，）絶対値 $|\cdot|$ の操作が必須である．そのために，まずは基本となる三角不等式を思い出そう．

三角不等式

任意の実数 x,y に対して，　$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$　が成り立つ．

それでは，よく知られた関数の極限の性質を証明していこう．

補題. ある実数 α，β に対して，$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$
- $\lim_{x\to a}\{kf(x)\}=k\alpha$

が成り立つ．

証明．１つ目を示す．$h(x)=f(x)+g(x)$ とおき，$\gamma=\alpha+\beta$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，次を満たす $\delta>0$ の存在を証明するのが目標である：

$$0<|x-a|<\delta \text{ である全ての } x \text{ に対して，} |h(x)-\gamma|<\varepsilon \text{ が成り立つ．}$$

任意の $\varepsilon>0$ を固定する．与えられた２つの仮定 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ は，定義にしたがってそれぞれ次のように書き換えられる[1]：

$$\frac{\varepsilon}{2} \text{ に対して，} \delta_1=\delta_1(\tfrac{\varepsilon}{2})>0 \text{ が存在して，} 0<|x-a|<\delta_1 \Longrightarrow |f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ が成り立つ．}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \text{ に対して，} \delta_2=\delta_2(\tfrac{\varepsilon}{2})>0 \text{ が存在して，} 0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ が成り立つ．}$$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ [2] とすると，$\delta\le\delta_1,\delta_2$ なので，$0<|x-a|<\delta$ である全ての x に対して，$|f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ かつ，$|g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つので，このとき，

$$\begin{aligned}|h(x)-\gamma|=|f(x)+g(x)-(\alpha+\beta)| &= |f(x)-\alpha+g(x)-\beta| \\ &\le |f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．これが目標の不等式であった．

[1] あとで三角不等式を用いることを想定して，$\frac{\varepsilon}{2}$ に対して，定義を適用している

[2] δ_1 と δ_2 の小さい方を δ とする．

２つ目を示す．目標は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次を満たす $\delta > 0$ の存在を証明することである：

$0 <| x - a |< \delta$ である全ての x に対して，$| kf(x) - k\alpha |< \varepsilon$ が成り立つ．

任意の $\varepsilon > 0$ を固定し，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ とおく．仮定 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ は次のように書ける[3]：

ε' に対して，$\delta = \delta(\varepsilon') > 0$ が存在して，$0 <| x - a |< \delta \Longrightarrow | f(x) - \alpha |< \varepsilon'$ が成り立つ．

これを用いると，$0 <| x - a |< \delta$ である全ての x に対して，

$$| kf(x) - k\alpha |=| k | \cdot | f(x) - \alpha |<| k | \varepsilon' = \varepsilon$$

が成り立つ．これが目標の不等式であった． □

続けて，よく知られた積や商の極限についても，厳密に証明しておく．

関数の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\lim_{x \to a} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$ （k, l は定数）
- $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$）

が成り立つ．

証明．１つ目は上の補題から従う．２つ目（積の極限）を証明する．任意の $\varepsilon > 0$ を固定する．極限を考えるので，$0 < \varepsilon < 1+ | \alpha | + | \beta |$ を仮定して良い[4]．$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+ | \alpha | + | \beta |}$ とおくと，$0 < \varepsilon' < 1$ である．仮定から，ε' に対して，$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon')$，$\delta_2 = \delta_2(\varepsilon')$ が存在して，次が成り立つ．

$$0 <| x - a |< \delta_1 \Longrightarrow | f(x) - \alpha |< \varepsilon', \qquad 0 <| x - a |< \delta_2 \Longrightarrow | g(x) - \beta |< \varepsilon'.$$

ここで，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると，$0 <| x - a |< \delta \Longrightarrow | g(x) - \beta |< \varepsilon'$ かつ $| f(x) - \alpha |< \varepsilon'$ が成り立つので，$f(x)g(x) - \alpha\beta = \beta\{f(x) - \alpha\} + \alpha\{g(x) - \beta\} + \{f(x) - \alpha\}\{g(x) - \beta\}$ と変形できることに注意すると，次が従う．

$$\begin{aligned} | f(x)g(x) - \alpha\beta | &\leq |\beta| \, | f(x) - \alpha | + |\alpha| \, | g(x) - \beta | + | f(x) - \alpha || g(x) - \beta | \\ &< |\beta|\varepsilon' + |\alpha|\varepsilon' + (\varepsilon')^2 = (|\beta| + |\alpha| + \varepsilon')\varepsilon' < (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon' = \varepsilon. \end{aligned}$$

３つ目（商の極限）を証明する．積の極限を証明したので，$\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\beta}$ を示せば十分である．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，$\varepsilon' = \dfrac{|\beta|^2\varepsilon}{1 + |\beta|\varepsilon} > 0$ とおく．仮定から，ε' に対して，$\delta = \delta(\varepsilon')$ が存在して，$0 <| x - a |< \delta$ である全ての x に対して，$| g(x) - \beta |< \varepsilon'$ が成り立つ．ここで，$\varepsilon' >| g(x) - \beta |\geq |\beta| - | g(x) |$ から，

$$| g(x) |\geq |\beta| - \varepsilon' = |\beta| - \frac{|\beta|^2\varepsilon}{1 + |\beta|\varepsilon} = \frac{|\beta|}{1 + |\beta|\varepsilon}$$

が成り立つことに注意すると，次が従う．

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{| \beta - g(x) |}{| g(x) | \, |\beta|} < \frac{\varepsilon'}{\frac{|\beta|}{1+|\beta|\varepsilon}|\beta|} = \frac{\varepsilon'}{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

□

[3] $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|k|}$ に対して，定義を適用している

[4] 定義から，「任意の ε」に対して，(1) をみたす事を確認しなければならないが，このうち，本質的なのは，「限りなく小さい ε」の部分である．実際，$1+ | \alpha | + | \beta |\leq \varepsilon$ である ε に対しては，$\varepsilon' < 1$ として，容易に証明できる．