関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）定義と四則演算その２

関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）定義と四則演算その 1 では，$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束する場合の厳密な定義を紹介し，それに基づき関数の極限の基本的な性質を証明した．ここでは，まず $x \to \infty$ のときや，$f(x)$ が発散するときなどの厳密な定義を紹介する．（その 1 で定義したものも再掲する．）

関数の極限の定義（$x \to a$ の場合）

定義. 関数 $f(x)$ は，点 a の近くで定義されているとする[a]．

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$0 <| x-a |< \delta \text{ である全ての } x \text{ に対して，} | f(x)-\alpha |< \varepsilon \text{ が成り立つ} \tag{1}$$

  とき，α を $x \to a$ **のときの関数** $f(x)$ **の極限値**といい，$\alpha = \lim_{x\to a} f(x)$ と表す．（収束）

- 任意の $K > 0$ に対して，ある $\delta = \delta(K) > 0$ が存在して，

$$0 <| x-a |< \delta \text{ である全ての } x \text{ に対して,} f(x) > K \text{ が成り立つ} \tag{2}$$

  とき，$f(x)$ は $x \to a$ **のとき** ∞ **に発散する**といい，$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ と表す．

- 任意の $K < 0$ に対して，ある $\delta = \delta(K) > 0$ が存在して，

$$0 <| x-a |< \delta \text{ である全ての } x \text{ に対して,} f(x) < K \text{ が成り立つ} \tag{3}$$

  とき，$f(x)$ は $x \to a$ **のとき** $-\infty$ **に発散する**といい，$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ と表す．

[a]点 a では定義されていなくても良い．もちろん全ての実数で定義されていても良い．

関数の極限の定義（$x \to \infty$ の場合）

定義. 関数 $f(x)$ は，ある c に対して区間 (c, ∞) で定義されているとする[a]．

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $L = L(\varepsilon)$ が存在して，

$$x > L \text{ である全ての } x \text{ に対して，} | f(x)-\alpha |< \varepsilon \text{ が成り立つ} \tag{4}$$

  とき，α を $x \to \infty$ **のときの関数** $f(x)$ **の極限値**といい，$\alpha = \lim_{x\to\infty} f(x)$ と表す．（収束）

- 任意の $K > 0$ に対して，ある $L = L(K)$ が存在して，

$$x > L \text{ である全ての } x \text{ に対して,} f(x) > K \text{ が成り立つ} \tag{5}$$

  とき，$f(x)$ は $x \to \infty$ **のとき** ∞ **に発散する**といい，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ と表す．

- 任意の $K < 0$ に対して，ある $\delta = \delta(K) > 0$ が存在して，

$$x > L \text{ である全ての } x \text{ に対して,} f(x) < K \text{ が成り立つ} \tag{6}$$

  とき，$f(x)$ は $x \to \infty$ **のとき** $-\infty$ **に発散する**といい，$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ と表す．

[a]点 c はかなり大きい数でも良い．もちろん全ての実数で定義されていても良い．

$-\infty$ の極限についても同様に定義することができる．

関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）定義と四則演算その 1 で紹介した極限公式の $x\to\pm\infty$ の場合の証明を紹介する．証明方法は，$x\to a$ の場合とほとんど同様である[1]．

関数の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{kf(x)+lg(x)\}=k\alpha+l\beta$　　（k,l は定数）
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\alpha\beta$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　　（$\beta\neq 0$）

が成り立つ．これらは，$x\to-\infty$ の場合も同様に成り立つ．

証明．上でも述べたように，証明方法は，$x\to a$ の場合と同じなので，次の 2 つの場合のみ証明する．

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=\alpha\beta$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　　（$\beta\neq 0$）

まず 1 つ目を証明する．任意の $\varepsilon>0$ を固定する．極限を考えるので，$0<\varepsilon<1+\mid\alpha\mid+\mid\beta\mid$ を仮定して良い[2]．$\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{1+\mid\alpha\mid+\mid\beta\mid}$ とおくと，$0<\varepsilon'<1$ である．仮定から，ε' に対して，$L_1=L_1(\varepsilon')$，$L_2=L_2(\varepsilon')$ が存在して，次が成り立つ．

$$x>L_1\Longrightarrow\mid f(x)-\alpha\mid<\varepsilon',\qquad x>L_2\Longrightarrow\mid g(x)-\beta\mid<\varepsilon'.$$

ここで，$L=\mathrm{Max}\{L_1,L_2\}$ [3] とすると，

$$x>L\Longrightarrow\mid g(x)-\beta\mid<\varepsilon' \text{ かつ } \mid f(x)-\alpha\mid<\varepsilon'$$

が成り立つ．また，

$$f(x)g(x)-\alpha\beta=\beta\{f(x)-\alpha\}+\alpha\{g(x)-\beta\}+\{f(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}$$

と変形できることに注意すると，次が従う．

$$\begin{aligned}\mid f(x)g(x)-\alpha\beta\mid&\leq|\beta|\mid f(x)-\alpha\mid+|\alpha|\mid g(x)-\beta\mid+\mid f(x)-\alpha\mid\mid g(x)-\beta\mid\\&<|\beta|\varepsilon'+|\alpha|\varepsilon'+(\varepsilon')^2=(|\beta|+|\alpha|+\varepsilon')\varepsilon'<(1+|\alpha|+|\beta|)\varepsilon'=\varepsilon.\end{aligned}$$

2 つ目を証明する．主張の仮定は，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=\beta$ であることに注意する．上とほとんど同様の方法で，$x\to-\infty$ の場合の積の極限公式も証明できるので，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\beta}$ を示せば十分である[4]．任意に $\varepsilon>0$ をとり，$\varepsilon'=\dfrac{|\beta|^2\varepsilon}{1+|\beta|\varepsilon}>0$ とおく．仮定から，ε' に対して，$L=L(\varepsilon')$ が存在して，次が成り立つ．

$$x<L\Longrightarrow\mid g(x)-\beta\mid<\varepsilon'.$$

ここで，$\varepsilon'>\mid g(x)-\beta\mid\geq|\beta|-\mid g(x)\mid$ から，$\mid g(x)\mid\geq|\beta|-\varepsilon'=\dfrac{|\beta|}{1+|\beta|\varepsilon}$ が成り立つので，

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{\mid\beta-g(x)\mid}{\mid g(x)\mid|\beta|}<\frac{\varepsilon'}{\frac{|\beta|}{1+|\beta|\varepsilon}|\beta|}=\frac{\varepsilon'}{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

が従う．□

---

[1] 関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）その 1 では，$x\to a$ の場合を証明している．

[2] 定義から，「任意の ε」に対して，(4) をみたす事を確認しなければならないが，このうち，本質的なのは，「限りなく小さい ε」の部分である．実際，$1+\mid\alpha\mid+\mid\beta\mid\leq\varepsilon$ である ε に対しては，$\varepsilon'<1$ として，容易に証明できる．

[3] L_1 と L_2 の大きい方を L とする．

[4] $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ に積の極限公式を適用すれば良い．