関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）はさみうちの原理

関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）定義と四則演算その１，２では，極限を厳密に定義し，極限の四則演算に関する基本的な極限公式を証明した．ここでは，さらに次の極限の性質を証明する[1]．

ある実数 α，β に対して，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ が成り立つとする．このとき，

$$a \text{ の近くの全ての } x \text{ に対して，} f(x)\leq g(x) \implies \alpha\leq\beta,$$

が成り立つ．

証明．背理法で証明する．$\alpha>\beta$ を仮定し，$\varepsilon=\dfrac{\alpha-\beta}{2}>0$ とする．仮定から，この ε に対して，

$$\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0 \text{ が存在して，} 0<\mid x-a\mid<\delta_1 \Longrightarrow \mid f(x)-\alpha\mid<\varepsilon,$$

$$\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0 \text{ が存在して，} 0<\mid x-a\mid<\delta_2 \Longrightarrow \mid g(x)-\beta\mid<\varepsilon$$

が成り立つ．$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると，$0<\mid x-a\mid<\delta$ である全ての x に対して，上の２つが成り立つので，これらから，

$$\alpha-f(x)\leq\mid f(x)-\alpha\mid<\varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{2}\Longrightarrow f(x)>\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$g(x)-\beta\leq\mid g(x)-\beta\mid<\varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{2}\Longrightarrow g(x)<\frac{\alpha-\beta}{2}+\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

が成り立つ．よって，このとき，

$$g(x)<\frac{\alpha+\beta}{2}<f(x)$$

を得るが，これは仮定に矛盾である． □

証明はほとんど同じなので省略するが，次の形の主張も成り立つ．

ある実数 α，β に対して，

- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to\infty} g(x)=\beta$ が成り立つとき，次が成り立つ．

$$\text{十分大きい } x \text{ に対して，} f(x)\leq g(x) \implies \alpha\leq\beta,$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\beta$ が成り立つとき，次が成り立つ．

$$\text{十分小さい } x \text{ に対して，} f(x)\leq g(x) \implies \alpha\leq\beta,$$

注意．上の命題の仮定は，$f(x)<g(x)$ であっても同様の結論が得られることに注意する．これは，仮定を強めているだけなので当たり前のことであるが，証明も全く同様にして矛盾を導くことができる．

しかし結論を $\alpha<\beta$ のように強めることはできない．これに関しての反例を紹介する．

例． $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{2}{x}$ として，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to\infty} g(x)=\beta$ とする．

このとき，全ての正の実数に対して，$f(x)<g(x)$ が成り立つ[2] が，$\alpha=\beta=0$ であり，$\alpha<\beta$ ではない．

[1] これらの性質も高校数学で良く使われるが，厳密な証明はなされていなかった．

[2] つまり，十分大きい x に対して，$f(x)<g(x)$ が成り立つ．

次のような形の主張も成り立つ[3]．

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ が成り立つとき，次が成り立つ．

$$a \text{ の近くの全ての } x \text{ に対して，} f(x) \leq g(x) \implies \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

証明．$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ が成り立つという仮定から，任意の $K > 0$ に対して，

$$\delta = \delta(K) > 0 \text{ が存在して，} 0 <| x - a |< \delta \Longrightarrow f(x) > K$$

が成り立つ．また，a の近くの全ての x に対して，$f(x) \leq g(x)$ であるという仮定から，$0 <| x - a |< \delta$ である全ての x に対して，$g(x) \geq f(x) > K$ が成り立つので，$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ が従う．□

補足． 上の証明と同様にして，「$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ かつ $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ 」が結論づけらることもわかる．さらに，$x \to \pm\infty$ などのときも同様に示される．

次にはさみうちの原理[4] と呼ばれる重要な定理を証明する．

はさみうちの原理

ある実数 α に対して，$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ が成り立つとする．このとき，

$$a \text{ の近くの全ての } x \text{ に対して，} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \implies \lim_{x \to a} h(x) = \alpha$$

が成り立つ．これは，$x \to \pm\infty$ でも成り立つ．

証明．仮定から，任意の ε に対して，

$$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \text{ が存在して，} 0 <| x - a |< \delta_1 \Longrightarrow | f(x) - \alpha |< \varepsilon,$$

$$\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \text{ が存在して，} 0 <| x - a |< \delta_2 \Longrightarrow | g(x) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると，$0 <| x - a |< \delta$ である全ての x に対して，上の 2 つが成り立つので，これらから，

$$\alpha - f(x) \leq | f(x) - \alpha |< \varepsilon \Longrightarrow f(x) > \alpha - \varepsilon$$

$$g(x) - \alpha \leq | g(x) - \alpha |< \varepsilon \Longrightarrow g(x) < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ．よってこのとき，仮定 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ と合わせて，

$$\alpha - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \alpha + \varepsilon \tag{1}$$

から，$| h(x) - \alpha |< \varepsilon$ を得る．すなわち，$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ が従う．$x \to \pm\infty$ の場合も同様である．□

注意． はさみうちの原理の仮定は，$f(x) < h(x) < g(x)$ であっても同様の結論が得られることに注意する．これは，仮定を強めているだけなので当たり前のことであるが，証明としては，上の (1) 式が，$\alpha - \varepsilon < f(x) < h(x) < g(x) < \alpha + \varepsilon$ に変わるだけで他は同様である．

[3] 記号 ∞ は，発散することを表す記号なので，実数ではないが，「任意の実数より大きいもの」のようなイメージを持つことで，これまでの命題と同じようなことを主張していることがわかるだろう．

[4] 高校数学では，極限の定義が曖昧なので，厳密な証明がなされないため「原理」のように呼ばれているが，これは厳密に証明される「定理」である．