関数の極限（$\varepsilon-\delta$ 論法）片側極限

ここでは，$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて，片側極限の厳密な定義を紹介する．

右極限の定義

定義. 関数 $f(x)$ は，少なくとも区間 $(a, a+\varepsilon_0)$ で定義されているとする．（$\varepsilon_0>0$ は微小でも良い．）

- 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，

$$0<x-a<\delta \text{ である全ての } x \text{ に対して，} |\, f(x)-\alpha \,|<\varepsilon \text{ が成り立つ} \tag{1}$$

  とき，α を**関数 $f(x)$ の a での右極限**といい，$\alpha=\lim_{x\to a+0} f(x)$ と表す．

- 任意の $K>0$ に対して，ある $\delta=\delta(K)>0$ が存在して，

$$0<x-a<\delta \text{ である全ての } x \text{ に対して}, f(x)>K \text{ が成り立つ} \tag{2}$$

  とき，**関数 $f(x)$ の a での右極限は ∞ に発散する**といい，$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ と表す．

- 任意の $K<0$ に対して，ある $\delta=\delta(K)>0$ が存在して，

$$0<x-a<\delta \text{ である全ての } x \text{ に対して}, f(x)<K \text{ が成り立つ} \tag{3}$$

  とき，**関数 $f(x)$ の a での右極限は $-\infty$ に発散する**といい，$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ と表す．

左極限の定義

定義. 関数 $f(x)$ は，少なくとも区間 $(a-\varepsilon_0, a)$ で定義されているとする．（$\varepsilon_0>0$ は微小でも良い．）

- 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，

$$-\delta<x-a<0 \text{ である全ての } x \text{ に対して，} |\, f(x)-\alpha \,|<\varepsilon \text{ が成り立つ} \tag{4}$$

  とき，α を**関数 $f(x)$ の a での左極限**といい，$\alpha=\lim_{x\to a-0} f(x)$ と表す．

- 任意の $K>0$ に対して，ある $\delta=\delta(K)>0$ が存在して，

$$-\delta<x-a<0 \text{ である全ての } x \text{ に対して}, f(x)>K \text{ が成り立つ} \tag{5}$$

  とき，**関数 $f(x)$ の a での左極限は ∞ に発散する**といい，$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ と表す．

- 任意の $K<0$ に対して，ある $\delta=\delta(K)>0$ が存在して，

$$-\delta<x-a<0 \text{ である全ての } x \text{ に対して}, f(x)<K \text{ が成り立つ} \tag{6}$$

  とき，**関数 $f(x)$ の a での左極限は $-\infty$ に発散する**といい，$\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ と表す．

注意. 上の定義において，$a=0$ のときは，$x\to 0+0$ を $x\to +0$ のように略記する．同様に，$x\to 0-0$ を $x\to -0$ のように略記する．

次に関数が収束するための必要十分条件は，右側極限と左側極限が存在して，それらが一致することであるという結果を証明する．

α を実数とする．このとき次が成り立つ．

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

証明．実数 a と $\delta > 0$ に対して，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の 3 つの部分集合を次のように定める：

$$I_{a+0}(\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x - a < \delta\}, \qquad I_{a-0}(\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\delta < x - a < 0\},$$
$$I_a(\delta) = I_{a+0} \cup I_{a-0} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 <| x - a |< \delta\}.$$

$(\Rightarrow)$ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$x \in I_a(\delta) \implies | f(x) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．$I_{a+0}(\delta) \subset I_a(\delta)$ なので，

$$x \in I_{a+0}(\delta) \implies x \in I_a(\delta) \implies | f(x) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ が従う．同様にして，$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ も従う．

$(\Leftarrow)$ $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ を仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$x \in I_{a+0}(\delta) \implies | f(x) - \alpha |< \varepsilon \quad \text{かつ，} \quad x \in I_{a-0}(\delta) \implies | f(x) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．$I_a(\delta) = I_{a+0} \cup I_{a-0}$ なので，

$$x \in I_a(\delta) \implies x \in I_{a+0} \quad \text{または，} \quad x \in I_{a-0} \implies | f(x) - \alpha |< \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ が従う．

□

右側極限や左側極限に関しても，次のようにこれまで証明した関数の極限の性質が成り立つ．証明はほとんど同じなので省略する．下では，$x \to a + 0$ の場合と $x \to a - 0$ の場合を合わせて $x \to a \pm 0$ と書いていることに注意する．

関数の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\lim_{x\to a\pm0} f(x) = \alpha$，$\lim_{x\to a\pm0} g(x) = \beta$ が成り立つとする．このとき，次が成り立つ．

- $\lim_{x\to a\pm0} \{kf(x) + lg(x)\} = k\alpha + l\beta$ （k, l は定数）
- $\lim_{x\to a\pm0} f(x)g(x) = \alpha\beta$
- $\lim_{x\to a\pm0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$）
- a より少し大きい（小さい）全ての x に対して，$f(x) \leq g(x) \implies \alpha \leq \beta$，
- a より少し大きい（小さい）全ての x に対して，
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ かつ } \alpha = \beta \implies \lim_{x\to a\pm0} h(x) = \alpha$$