数列の極限

無限数列 $a_1, a_2, \cdots$ を，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ や，単に $\{a_n\}$ と表す．まずは，数列がある値に収束するということを定義する．

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，項の番号 n を限りなく大きくすると，項の値 a_n がある値 α に限りなく近くとき，この値 α を**数列 $\{a_n\}$ の極限値**または，**極限**といい，次のように表す：

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

定義. ある実数 α に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるとき，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という．

注意. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを，「$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ 」と表すこともある．

定義. 数列 $\{a_n\}$ が，収束しないとき，**発散する**という．発散する場合を次のように 3 つに分けて言葉を定義する：項の番号 n を限りなく大きくすると，項の値 a_n が

- 限りなく大きくなるとき，**数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散する**といい，次のように表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

- 限りなく小さくなる[1] とき，**数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する**といい，次のように表す．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

- 正の無限大にも，負の無限大にも発散しないとき，**数列 $\{a_n\}$ は振動する**という．

注意. 数列 $\{a_n\}$ が，「正の無限大に発散する」ことを，「$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$」と表すと，上で定義したが，これは，数列が「正の無限大に発散する」という状況を表している記号であり，∞ という実数が存在するわけではないということに注意する．しかし，「正の無限大に発散する」という状況を「極限値は正の無限大である」ということも多いので，これには，上の下線部で述べた意味で注意が必要である．さらに，これに合わせて，「負の無限大に発散する」という状況を「極限値は負の無限大である」といい，「収束する場合，正の無限大，負の無限大に発散する場合」を合わせて，「極限がある」ということもある．この場合，「極限がない」とは，「振動する場合」のことであり，「発散する場合」のことではないので注意が必要である．

例.

- 等差数列 $a_n = 3n + 1$ は，正の無限大に発散する．すなわち，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} (3n + 1) = \infty$$

- 等比数列 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ は，0 に収束する．すなわち，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

- 数列 $a_n = (-1)^n$ は，振動する．これは，

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1, \cdots$$

であることからわかる．

[1] 値が負でその絶対値が限りなく大きくなるということ．

次に，数列の極限と四則演算には互換性があるという性質を紹介する．

数列の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\lim_{n\to\infty}(ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$ （k, l は定数）
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$）

が成り立つ．

次の結果は，直接極限を求めにくい数列の極限値や，その範囲を求めるのに有効である．

ある実数 α，β に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が成り立つとする．このとき，

1. 全ての n に対して，$a_n \leq b_n \implies \alpha \leq \beta$,
2. 全ての n に対して，$a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

が成り立つ．2. については，その主張の形から，**はさみうちの原理**と呼ばれている．

注意． 上の定理において，（当然のことであるが）仮定を強めても，すなわち，仮定の $\leq$ を $<$ に変えても，結論の式が成り立つ．例えば，1. においては，

$$\text{全ての } n \text{ に対して，} a_n < b_n \implies \alpha \leq \beta$$

が成り立つし，2. においては，

$$\text{全ての } n \text{ に対して，} a_n < c_n < b_n \text{ かつ } \alpha = \beta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ．さらに，次も成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ かつ全ての } n \text{ に対して } a_n \leq b_n \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

これは，あくまでイメージであるが，任意の実数より ∞ は大きいと思うと，上の性質の 1. に対応していると捉えられる．

最後に，基本的な数列の極限を紹介する．

$k > 0$ のとき，次が成り立つ．

- $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

注意． これまでに証明なしで紹介したいくつかの性質や例は，直感的には納得できる事実であると思うが，高校数学の範囲では厳密に証明することができない．これは，数列の極限の定義において，「限りなく近づく」と曖昧な表現が使われているからである．これを厳密に定義するには，$\varepsilon - N$ 論法と呼ばれる議論が必要になるが，残念ながら高校数学の範囲を超えてしまう．$\varepsilon - N$ 論法については，数列の極限（$\varepsilon - N$ 論法）定義と基本極限[2] を参照してほしい．

[2] https://gleamath.com/lim-epsilon-n-def/