数列の極限（$\varepsilon - N$ 論法）定義と基本極限

無限数列 $a_1, a_2, \cdots$ を，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ や，単に $\{a_n\}$ と表す．高校数学において，数列の極限は，「限りなく近づくとき $\cdots$」のような曖昧な表現を使って定義されるのであった．これを厳密に定義すると次のようになる：

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，任意の正数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} \mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つとき，α を**数列 $\{a_n\}$ の極限値**といい，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ と表す．またこのとき，数列 $\{a_n\}$ は，α に**収束する**ともいう．

注意. 上の定義において，「自然数 N が存在して (1) 式が成り立つ」という表現は，少し聴き慣れないかもしれないが，これは，「(1) 式を満たすような自然数 N が存在する」という意味である．つまり，数列 $\{a_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示したいときは，(1) 式を満たすような N の存在を言えば良いことになる．N は，ε に寄っても良いので，$N = N(\varepsilon)$ とかかれることもある．

次に発散する場合の厳密な定義を述べる．

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，

- 任意の実数 $K > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} a_n > K \tag{2}$$

  が成り立つとき，**数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散する**といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す．

- 任意の実数 $K < 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} a_n < K \tag{3}$$

  が成り立つとき，**数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する**といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と表す．

- 収束せず，正の無限大にも，負の無限大にも発散しないとき，**数列 $\{a_n\}$ は振動する**という．

補足. 上でみた厳密な数列の極限の定義を，その気持ちを補足して言い換えると次のようになるだろう．

- どれだけ小さい $\varepsilon > 0$ に対しても，かなり大きい項の番号 N を取れば，それより後の項の値は，$\mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon$ をみたす．

すなわち，これは，

- かなり大きい項の番号 N を取れば，それより後の項の値と α との差は，いくらでも小さくできる．

ということであり，さらに噛み砕くと，

- 項の番号 n を限りなく大きくすると，項の値 a_n が限りなく α に近く．

と言える．最後の主張は，高校数学での定義そのものであり，このようにみると，高校数学での定義は，(曖昧ではあるが，) $\varepsilon - N$ 論法の気持ちをうまく説明しているようにも感じる．この曖昧さは，「限りなく $\cdots$」という「極限操作」の部分にあるが，それを $\varepsilon - N$ 論法では，「任意の ε に対して，ある N が $\cdots$」というように有限の数を用いて記述することで回避しているのである．

それでは，この厳密な定義に基づいて，数列の基本極限を証明する．

命題． $k>0$ のとき，次が成り立つ．

- $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

証明． $k>0$ とする．

- まず 1 つ目の主張を示す．目標は，

$$\text{任意の実数 } K>0 \text{ に対して，} n>N \Longrightarrow n^k>K \text{ をみたす自然数 } N \text{ の存在}$$

を示すことである．任意に実数 $K>0$ をとり，$L=K^{\frac{1}{k}}$ とおくと，L は正の実数である．アルキメデスの公理[1] より，正の実数 $1, L$ に対して，$L<N\cdot 1=N$ をみたす自然数 N が存在する．このとき，$n>N$ である全ての自然数 n に対して，$n>N>L$ なので，

$$n^k>L^k=K$$

が成り立つ．よって主張が示された．

- 2 つ目を示す．目標は，

$$\text{任意の実数 } \varepsilon>0 \text{ に対して，} n>N \Longrightarrow \frac{1}{n^k}<\varepsilon \text{ をみたす自然数 } N \text{ の存在}$$

を示すことである．任意に実数 $\varepsilon>0$ をとり，$K=\dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと，K は正の実数である．上と同様にして，この K に対して，

$$n>N \Longrightarrow n^k>K$$

をみたす自然数 N が存在する．よって，$n>N$ である全ての自然数 n に対して，

$$\frac{1}{n^k}<\frac{1}{K}=\varepsilon$$

が成り立つ．よって主張が示された．

□

注意． 上の命題について，どちらの主張の証明にもアルキメデスの公理が用いられていることに注意する．この理由は，（実数ではなくて，）<u>自然数 N</u>の存在を示す必要があるからである．例えば，この部分を見落とすと，1 つ目の主張の証明において，任意の $K>0$ に対して，$N=K^{\frac{1}{k}}$ とおけば，$n>N \Longrightarrow n^k>N^k=K$ となり主張が示されたかのように見えるかもしれない．しかし，これは上に述べた理由から間違いである．つまり，これでは，N が自然数とは限らないのである．

アルキメデスの公理は，それ自身を公理として採用する場合もあるが，実数の連続性公理[2] を採用した場合は，それから導くことができる事実である．直感的には当たり前のように感じる主張であるが，大切な公理である．

---

[1] 任意の正の実数 a, b に対して，$b<Na$ をみたす自然数 N が存在する．

[2] 実数全体の集合の空でない部分集合が上に（下に）有界ならば，上限（下限）が存在する．