数列の極限（$\varepsilon - N$ 論法）四則演算

無限数列 $a_1, a_2, \cdots$ を，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ や，単に $\{a_n\}$ と表す．数列 $\{a_n\}$ の極限値は，次のように定義されるのであった．

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，任意の正数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} |\, a_n - \alpha \,| < \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つとき，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ と表す．またこのとき，数列 $\{a_n\}$ は，α に**収束する**ともいう．

この定義により，次のよく知られた極限の性質が証明できる[1]．

数列の極限の性質

ある実数 α，β に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が成り立つとする．このとき，

- $\lim_{n\to\infty} (ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$ 　（k, l は定数）
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ 　（$\beta \neq 0$）

が成り立つ．

注意. 証明には，（極限の定義を見てもわかるように，）絶対値 $|\cdot|$ の操作が必須である．そのため，三角不等式[2] が頻繁に使われる．

証明．1 つ目の主張を示すには，次の 2 つを示せば十分である．

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ 　(ii) $\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k\alpha$

まず，(i) を示す．$c_n = a_n + b_n$ とおき，$\gamma = \alpha + \beta$ とおく．目標は，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} n > N \Longrightarrow |\, c_n - \gamma \,| < \varepsilon \text{ をみたす } N \text{ の存在}$$

を示すことである．任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．与えられた 2 つの仮定は，定義に従って，次のように書き換えられる[3]．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\ n > N_1 \Longrightarrow |\, a_n - \alpha \,| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ をみたす自然数 } N_1 \text{ が存在する．}\ \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\ n > N_2 \Longrightarrow |\, b_n - \beta \,| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ をみたす自然数 } N_2 \text{ が存在する．}\ \right]$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ [4] とすると，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，$n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成り立つので，上の 2 つの仮定と三角不等式を用いることで，

$$|\, c_n - \gamma \,| = |\, (a_n - \alpha) + (b_n - \beta) \,| \leq |\, a_n - \alpha \,| + |\, b_n - \beta \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

と評価できる．これで主張が示された．

---

[1] 高校数学での曖昧な数列の極限の定義では，厳密に証明することができなかった性質である．

[2] 三角不等式：任意の実数 x, y に対して，$|\, x \,| - |\, y \,| \leqq |\, x + y \,| \leqq |\, x \,| + |\, y \,|$ が成り立つ．

[3] あとで三角不等式を用いる事を想定して，$\frac{\varepsilon}{2}$ に対して，定義を適用している．

[4] N_1 と N_2 の大きい方を N とする．

次に (ii) を示す．目標は，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} n > N \Longrightarrow | ka_n - k\alpha | < \varepsilon \text{ をみたす } N \text{ の存在}$$

を示すことである．任意に $\varepsilon > 0$ を固定し，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ とおく．仮定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ から，

$$n > N \implies | a_n - \alpha | < \varepsilon'$$

をみたす自然数 N が存在する[5]．よって，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，

$$| ka_n - k\alpha | = |k| \cdot | a_n - \alpha | < |k| \cdot \varepsilon' = |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

が成り立つ．よって，主張が従う．

次に 2 つ目（積の極限）の主張を証明する．目標は，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} n > N \Longrightarrow | a_nb_n - \alpha\beta | < \varepsilon \text{ をみたす } N \text{ の存在}$$

を示すことである．仮定から，任意の ε' に対して，自然数 N_1, N_2 が存在して，

$$n > N_1 \Longrightarrow | a_n - \alpha | < \varepsilon', \qquad n > N_2 \Longrightarrow | b_n - \beta | < \varepsilon'.$$

が成り立つ．ここで，$N = \mathrm{Max}\{N_1, N_2\}$ とすると，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，$n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成り立つので，三角不等式を用いることで，

$$| a_nb_n - \alpha\beta | \leq |\beta| \, | a_n - \alpha | + |\alpha| \, | b_n - \beta | + | a_n - \alpha || b_n - \beta | = \varepsilon'(\varepsilon' + |\alpha| + |\beta|) \tag{2}$$

と評価できる[6]．

任意の $\varepsilon > 0$ を固定する．ε' は任意だったので，$1 + | \alpha | + | \beta | \leq \varepsilon$ のときは，$\varepsilon' < 1$ とすれば，評価式 (2) から，

$$| a_nb_n - \alpha\beta | < 1 + |\alpha| + |\beta| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．よって，この場合は良い．

$0 < \varepsilon < 1 + | \alpha | + | \beta |$ のときは，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1 + | \alpha | + | \beta |}$ とおくと，$0 < \varepsilon' < 1$ なので，評価式 (2) から，

$$| a_nb_n - \alpha\beta | < \varepsilon'(1 + |\alpha| + |\beta|) = \frac{\varepsilon}{1 + | \alpha | + | \beta |}(1 + |\alpha| + |\beta|) = \varepsilon$$

であり，この場合も主張が従う．

最後に 3 つ目（商の極限）の主張を証明する．積の極限公式を証明したので，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せば十分である[7]．目標は，

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して，} n > N \Longrightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| < \varepsilon \text{ をみたす } N \text{ の存在}$$

を示すことである．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，$\varepsilon' = \dfrac{|\beta|^2 \varepsilon}{1 + |\beta|\varepsilon} > 0$ とおく．仮定から，ε' に対して，ある自然数 N が存在して，$n > N \Longrightarrow | b_n - \beta | < \varepsilon'$ が成り立つので，これと三角不等式から，

$$\varepsilon' > | b_n - \beta | \geq | \beta | - |b_n| \iff | b_n | \geq |\beta| - \varepsilon' = \frac{|\beta|}{1 + |\beta|\varepsilon}$$

と評価できることに注意すると，$n > N$ である全ての自然数に対して，

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{| \beta - b_n |}{| b_n | \, |\beta|} < \frac{\varepsilon'}{\frac{|\beta|}{1 + |\beta|\varepsilon} |\beta|} = \frac{\varepsilon'}{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

が成り立つ．よって主張が従う． □

---

[5] $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|k|}$ に対して，定義を適用している

[6] $a_nb_n - \alpha\beta = \beta(a_n - \alpha) + \alpha(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)(b_n - \beta)$ である．

[7] $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$ に積の極限公式を適用すれば良い．