数列の極限（$\varepsilon - N$ 論法）はさみうちの原理

無限数列 $a_1, a_2, \cdots$ を，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ や，単に $\{a_n\}$ と表す．数列 $\{a_n\}$ の極限値は，次のように定義されるのであった．

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，任意の正数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} \mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon \tag{1}$$

が成り立つとき，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ と表す．またこのとき，数列 $\{a_n\}$ は，α に**収束する**ともいう．

この定義に基づいて，よく知られた極限の性質を証明していく[1]．

命題. ある実数 α，β に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき，次が成り立つ．

- 全ての n に対して，$a_n \leq b_n \implies \alpha \leq \beta$.
- 全ての n に対して，$a_n < b_n \implies \alpha \leq \beta$.

証明．１つの目の主張が成り立つと仮定すると，２つ目の主張が従う．なぜならは，２つ目の主張の仮定を満たしていれば，１つ目の主張の仮定をみたすからである．すなわち，

$$\text{全ての } n \text{ に対して，} a_n < b_n \quad \implies \quad \text{全ての } n \text{ に対して，} a_n \leq b_n$$

が成り立つからである．よって，１つ目の主張を示せば十分である．

背理法で証明する．$\alpha > \beta$ を仮定し，$\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{2} > 0$ とする．仮定から，この ε に対して，

$$n > N_1 \implies \mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon, \qquad n > N_2 \implies \mid b_n - \beta \mid < \varepsilon$$

をみたす N_1, N_2 が存在する．$N = \max\{N_1, N_2\}$ [2] とすると，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，$n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成り立つので，

$$\alpha - a_n \leq \mid a_n - \alpha \mid < \varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ から，} \qquad a_n > \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}\,,$$

$$b_n - \beta \leq \mid b_n - \beta \mid < \varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ から，} \qquad b_n < \frac{\alpha - \beta}{2} + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

が成り立つ．これらを合わせて，

$$b_n < \frac{\alpha + \beta}{2} < a_n$$

を得るが，これは仮定に矛盾である． □

注意. 上の命題の２つの主張の結論は，「$\alpha < \beta$」ではないことに注意する．実際，次の例のように「全ての n に対して，$a_n < b_n$」であっても，「$\alpha = \beta$」となることがあり得るのである．

例. 自然数 n に対して，２つの数列を $a_n = \dfrac{2}{n}$，$b_n = \dfrac{3}{n}$ と定めると，$b_n - a_n = \dfrac{1}{n} > 0$ なので，全ての n に対して，$a_n < b_n$ であるが，極限値はどちらも 0 なので，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ である．

[1] 高校数学での曖昧な数列の極限の定義では，厳密に証明することができなかった性質たちである．

[2] N_1 と N_2 の大きい方を N とする．

はさみうちの原理

定理. ある実数 α に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つとする．このとき，

$$\text{全ての } n \text{ に対して，} a_n \leq c_n \leq b_n \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ．

証明. 仮定から，任意の ε に対して，

$$n > N_1 \Longrightarrow | a_n - \alpha | < \varepsilon, \qquad n > N_2 \Longrightarrow | b_n - \alpha | < \varepsilon$$

をみたす N_1, N_2 が存在する．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，$n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成り立つので，（$a_n \leq c_n \leq b_n$ であることに注意すると．）このとき，$c_n - \alpha$ は，次のように評価できる．

$$-\varepsilon \; < \; a_n - \alpha \; \leq \; c_n - \alpha \; \leq \; b_n - \alpha \; < \; \varepsilon.$$

よって，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，

$$| c_n - \alpha | < \varepsilon$$

が成り立つ．よって主張が示された． □

最後に，数列が発散する場合[3] の命題を証明する．この事実は直感的にも明らかであろう．

命題. 次が成り立つ．

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ，全ての n に対して $a_n \leq b_n \implies \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ かつ，全ての n に対して $a_n \leq b_n \implies \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

証明. 1 つ目の主張を証明する．仮定から，任意の $K > 0$ に対して，$n > N \Longrightarrow a_n > K$ をみたす自然数 N が存在する．よって，$n > N$ である全ての自然数 n に対して，

$$b_n \geq a_n > K$$

が成り立つ．2 つ目の主張も同様に示すことができる． □

[3]発散する場合の厳密な定義

定義. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，

- 任意の実数 $K > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} a_n > K \tag{2}$$

  が成り立つとき，**数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散する**といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と表す．
- 任意の実数 $K < 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$n > N \text{ である全ての } n \text{ に対して，} a_n < K \tag{3}$$

  が成り立つとき，**数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する**といい，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と表す．
- 収束せず，正の無限大にも，負の無限大にも発散しないとき，**数列 $\{a_n\}$ は振動する**という．