三角関数の極限

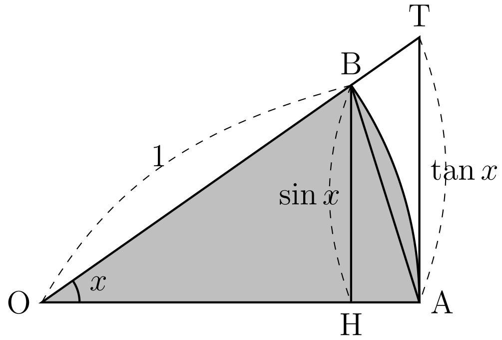
三角関数の極限については，次の極限が基本的である．

基本公式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証明．まず，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示す．

半径が 1，中心角が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の扇形 OAB を考える．点 B から，線分 OA に下ろした垂線の足を H とし，点 A を通り，直線 BH に平行な直線と，直線 OB との交点を T とする．



三角比の定義から，$\mathrm{BH} = \sin x$，$\mathrm{TA} = \tan x$ であり，弧度法の定義から，弧 AB の長さは x である．$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，次が成り立つ．

$$0 < \sin x < x < \tan x. \tag{1}$$

逆数をとり，各辺に $\sin x > 0$ をかけることで，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{2}$$

が従う．$\displaystyle\lim_{x \to +0} \cos x = 1$ なので，はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が従う．

　あとは，$x \to -0$ の場合を示せば良い．$x < 0$ として，$t = -x$ とおくと，$x \to -0$ のとき，$t \to +0$ である．よって，上の結果を用いることで，

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

が成り立つ．以上から，主張が従う．　□

…………………………………………………………………………………………

注意. 上の結果において，x の単位はラジアン（弧度法）である．度数法で考えた場合では結果が異なるので注意が必要である．具体的には，次のようになる：

$$\lim_{x \to 0^\circ} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

証明は，ほとんど同じだが，中心角が x° の扇形 OAB の弧 AB の長さが，$\dfrac{\pi x}{180}$ であることから，不等式 (1) が，$0 < \sin x < \dfrac{\pi}{180}x < \tan x$ の形となり，逆数をとり，各辺に $\dfrac{\pi}{180}\sin x > 0$ をかけることで，不等式 (2) が，$\dfrac{\pi}{180}\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{\pi}{180}$ の形となる．あとは同じである．

次に準公式と呼ばれる公式を紹介する．どちらも基本公式を使って導かれる．

準公式

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$　　2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

証明．1. 与式は，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

と変形できる．基本公式と，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ であることから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

が従う．

次に別解を紹介する．$x=2t$ とおくと，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos 2t}{(2t)^2}=\frac{1-(\cos^2 t-\sin^2 t)}{4t^2}=\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

が成り立つ．$x\to 0$ のとき，$t\to 0$ であるから，基本公式を用いて，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

が従う．

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ に注意すると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

が従う．　□

最後に例題をひとつ紹介しよう．

例． 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

解．$x\neq 0$ なので，与式の分母分子に x を掛けることで，

$$\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\frac{x\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

と変形できる．よって，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

が成り立つ．　□