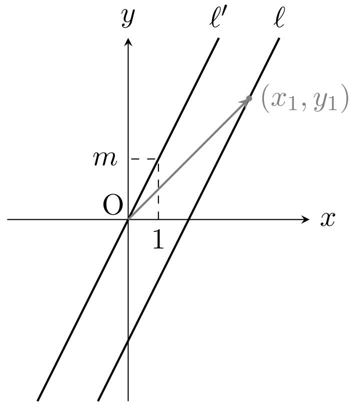
直線の方程式

点 O を原点とする座標平面上に直線を描く．次のような情報が揃えば，直線は 1 つに決まる．

1. 傾き[1] と，通る 1 点が分かっている場合．
2. 通る 2 点が分かっている場合．

それぞれの場合において，直線の方程式を求めよう．

1. 傾きが m であり，点 (x_1, y_1) を通る直線 ℓ の方程式．
傾きが m であり原点を通る直線を ℓ' とすると，その方程式は，



$$\ell' : y = mx$$

である．この直線を，

$$x \text{ 軸方向に } x_1, \quad y \text{ 軸方向に } y_1$$

だけ平行移動させた直線は，直線 ℓ に一致する．よって，

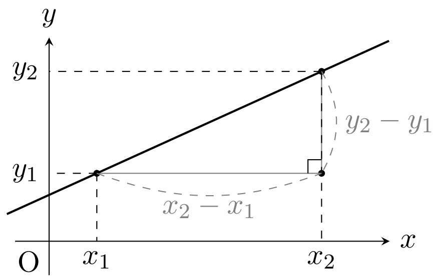
$$\boxed{\ell : (y - y_1) = m(x - x_1)}$$

が従う．
特に，通る 1 点が，y 軸上の点 $(0, b)$ である場合[2]は，良く知られた次の形を得ることができる．

$$y - b = m(x - 0) \Longleftrightarrow y = mx + b.$$

2. 2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線の方程式．

(i) $x_1 \neq x_2$ の場合．
通る 2 点が分かっているので，直線の傾き m は，

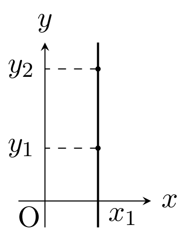


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と求められる．よって，1. の場合の直線の方程式の公式に代入することで，次が従う．

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(ii) $x_1 = x_2$ の場合．
通る 2 点の x 座標が等しいので，この場合の求める直線は，y 軸と平行な直線である．直線上の全ての点の x 座標は，y 座標の値によらず，常に x_1 である．よって，求める直線の方程式は，次のようになる．



$$x = x_1$$

以上の (i),(ii) をまとめると，2 点を通る直線の一般形として，次が得られる．

$$\boxed{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0}$$

---

[1]直線の傾きとは，$\dfrac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ であった．
[2]この点を直線に対して，y 切片というのであった．