1次不等式

不等式の性質

1. $a < b,\quad b < c$ ならば，　$a < c$
2. $a < b$ ならば，　$a + c < b + c$
   $a - c < b - c$
3. $a < b,\quad c > 0$ ならば，　$ac < bc,\quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$
4. $a < b,\quad c < 0$ ならば，　$ac > bc,\quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

絶対値が含まれる不等式は次のように扱う事ができる．
$a > 0$ のとき，

- $|x| < a$ の解は，　$-a < x < a$
- $|x| > a$ の解は，　$x < -a,\ a < x$

例． 次の不等式をときなさい．

$$|x+3| + |x-1| < 6$$

解答例． 絶対値をはずす際に，x の値に関して，次のような場合分けが必要である．

(i) $x \leqq -3$ とき，
$x + 3 \leqq 0$ かつ，$x - 1 < 0$ なので，与えられた不等式から，不等式，

$$-(x+3) - (x-1) < 6$$

を得る．これを解くと，$x > -4$ となり，この場合，$-4 < x \leqq -3$.

(ii) $-3 < x \leqq 1$ とき，
$x + 3 > 0$ かつ，$x - 1 \leqq 0$ なので，与えられた不等式から，不等式，

$$(x+3) - (x-1) < 6$$

を得る．これを解くと，$4 < 6$ となるので，今考えている範囲のすべての x で不等式が成り立つ．よって，この場合，$-3 < x \leqq 1$.

(iii) $1 < x$ とき，
$x + 3 > 0$ かつ，$x - 1 > 0$ なので，与えられた不等式から，不等式，

$$-(x+3) + (x-1) < 6$$

を得る．これを解くと，$x < 2$ となり，この場合，$1 < x < 2$.

したがって，(i)(ii)(iii) より，$-4 < x < 2$.