不定積分の性質

不定積分の定義から，連続関数 $f(x)$ に対して，

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つのであった．これと微分の線形性[1]から次が成り立つ．

積分の線形性（定数倍と和）

k を定数とする．

（定数倍）$\displaystyle \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

（和）$\displaystyle \int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

証明．k を定数とし，$f(x)$ の原始関数のうちの 1 つを $F(x)$ とする．微分の線形性から，

$$\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$$

が成り立つので，$kF(x)$ は，$kf(x)$ の原始関数のうちの 1 つである．よって，

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C = k\{F(x) + D\} = k\int f(x)dx$$

が成り立つ．ただし，C は任意の定数とし，$D = \dfrac{C}{k}$ とした．これで定数倍の公式が示された．

上の記号に加えて，$g(x)$ の原始関数のうちの 1 つを $G(x)$ とする．微分の線形性から，

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

が成り立つので，$F(x) + G(x)$ は，$f(x) + g(x)$ の原始関数のうちの 1 つである．よって，

$$\begin{aligned}\int \{f(x) + g(x)\}\,dx &= F(x) + G(x) + C \\ &= \{F(x) + C_1\} + \{G(x) + C_2\} \\ &= \int f(x)dx + \int g(x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，C は任意の定数とし，C_1，C_2 は，$C = C_1 + C_2$ が成り立つような任意の定数とした．これで，和の公式が示された． □

以上から，一般に次が成り立つことを確認しておく．

$$\int \{kf(x) + lg(x)\}dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx \qquad (k,\ l \text{ は定数})$$

[1] k を定数とする．このとき次が成り立つ．

（定数倍の微分）$\{kf(x)\}' = kf'(x)$

（和の微分）$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

証明は，導関数の公式 https://gleamath.com/derivative-formulas/ を参照．