



軌跡の基本事項

定義. 与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を, その条件を満たす点の軌跡という.

例. 1つの定点から等距離にあるという条件を満たす点の軌跡は, 円である.

座標平面上で軌跡を考えると, 次の手順に従うことにより, 軌跡の方程式を求めることができる.

軌跡の方程式を求める手順

1. 与えられた条件を満たす任意の点を $P(X, Y)$ とおく.
2. 与えられた条件から, X, Y の関係式 $f(X, Y) = 0$ を導く.
3. 逆に, $f(X, Y) = 0$ を満たす点 (X, Y) が, 与えられた条件を満たしているかを確認し, 満たしていない点があれば, それらを除外する.

例. 座標平面上の原点 $O(0, 0)$ からの距離が1である点の軌跡を上の手順に従って求めよう.

1. 原点 O からの距離が1である任意の点を $P(X, Y)$ とおく.
2. $OP = 1$ であるという条件は, 2点間の距離の公式から, $\sqrt{(X-0)^2 + (Y-0)^2} = 1$ と書ける. 両辺を2乗して, 次の X, Y の関係式を得る.

$$X^2 + Y^2 = 1. \quad (1)$$

3. 逆に, (1) 式を満たす全ての点 (X, Y) は, 原点 O からの距離が1であるという条件を満たす (除外する点はない).

以上より, 求める軌跡は, 原点 O を中心とする半径1の円である.

注意. 上の例では, 手順3.において, 除外する点が無かったので, その必要性が見えにくかったが, この手順3.は重要である. そのことを見るために次のような例を見てみよう:

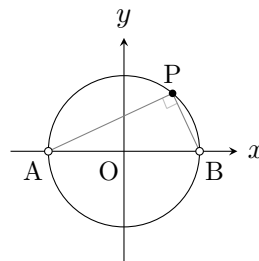
例. 座標平面上に2点 $A(-1, 0), B(1, 0)$ をとる. $\triangle APB$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形になるような, 点 P の軌跡を求めよ.

円周角の定理とその逆から, 求める軌跡は, 辺 AB を直径とする半径1の円, すなわち, 円 $x^2 + y^2 = 1$ であることが想像できると思うが, 正確には少し異なる. そのことを上の手順に従って確認しよう.

1. 与えられた点を $P(X, Y)$ とおく.
2. 直角三角形 APB に三平方の定理を適用すると, $AP^2 + BP^2 = AB^2$ が成り立つことから, 次の X, Y の関係式が得られる.

$$\{(X+1)^2 + Y^2\} + \{(X-1)^2 + Y^2\} = 2^2 \iff X^2 + Y^2 = 1 \quad (2)$$

3. 逆に, (2) 式を満たす点 (X, Y) が条件を満たすかを確認する. APB が三角形になるためには, $P \neq A, P \neq B$ でなければならない. よって, (2) 式から, $A(-1, 0)$ と $B(1, 0)$ を除いたものが求める軌跡である.



以上より, 求める軌跡は, 原点 O を中心とする半径1の円から, 2点 $A(-1, 0), B(1, 0)$ を除いた図形となる. これを図示すると, 右上図のようになる.

この例を見てわかるように, 手順2.において導いた X, Y の関係式 $f(X, Y) = 0$ は, 与えられた条件を満たすための必要条件でしかない. すなわち, 関係式 $f(X, Y) = 0$ を満たす点 (X, Y) 以外に条件を満たす点はないが, 関係式 $f(X, Y) = 0$ を満たす点 (X, Y) が全て条件を満たすかはわからないのである. よって, 条件を満たすための必要十分条件を求めるためには, 手順3.が必要なのである.