対数方程式

定義． $a>0, a\neq 1$ とする．対数関数 $\log_a x$ を含む方程式を**対数方程式**という．

対数方程式の解法において，基本となる次の命題である．証明は，対数関数の単調性から明らかであろう．

命題． $a>0, a\neq 1, M>0, N>0$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\log_a M = \log_a N \iff M = N$$

対数 $\log_a M$ の真数 M は必ず正であった事を思い出す．この条件は，**真数条件**と呼ばれ，対数方程式を解く際には注意しなければならない条件である．例えば，対数方程式

$$\log_2(x^2+x-2)=2 \tag{1}$$

は，(右辺) $=2\log_2 2=\log_2 4$ なので，

$$\log_2(x^2+x-2)=\log_2 4 \iff x^2+x-2=4 \iff x^2+x-6=0 \tag{2}$$

という同値変形から，二次方程式 $x^2+x-6=0$ を解けばよく，その解は，

$$x=-3,2 \tag{3}$$

と求めることができる．ここで，対数 $\log_2(x^2+x-2)$ の真数 x^2+x-2 は，正である必要があるが，ここで得られた 2 つの解は，同値変形 (2) の真ん中の方程式 $x^2+x-2=4$ の解であり，（当たり前のことであるが，）$4>0$ なので，（このような場合は必ず，）得られた解は真数条件を満たす．よって，対数方程式 (1) の解法において，真数条件の確認の必要はない．

ではどのような場合に真数条件の確認が必要になるのか．次に，よく似た対数方程式

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2 \tag{4}$$

を考える．左辺は，対数の性質から，（x を単に文字だと思うと，）

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=\log_2(x-1)(x+2)=\log_2(x^2+x-2)$$

と計算できるので，対数方程式 (1) と同じ方程式に見えるが，真数条件が異なるのである．この対数方程式 (4) の真数条件は，

$$x-1>0 \quad \text{かつ} \quad x+2>0 \qquad \text{すなわち} \qquad x>1$$

である．この部分以外は上と同様にして，2 つの解 (3) が得られるが，このうち真数条件 $x>1$ のもとでは，

$$x=2$$

だけが求める解となる．

このように，よく似た 2 つの方程式 (1)(4) の解に違いがあるのは，真数条件に違いがあるからである．すなわち，2 つの対数方程式

$$\log_2(x^2+x-2)=2 \quad \text{と} \quad \log_2(x-1)+\log_2(x+2)=2 \quad \text{は同値ではない}$$

のである．ただし，この 2 つの対数方程式は，$x>1$ という条件のもとでは，同値である．