対数不等式

定義. $a>0, a\neq 1$ とする．対数関数 $\log_a x$ を含む不等式を**対数不等式**という．

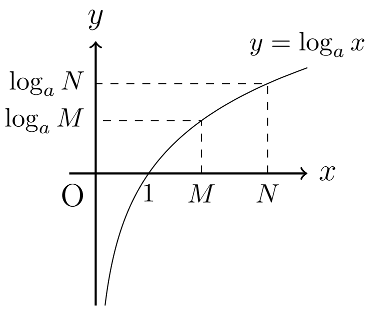
対数不等式の解法において，基本となるのは，次の命題である．

命題. $a>0, a\neq 1, M>0, N>0$ とする．このとき，次が成り立つ．

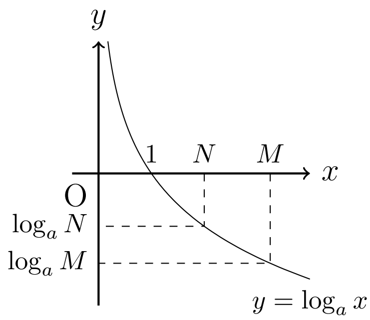
$$a>1 \text{ なら}\ ,\quad \log_a M < \log_a N \iff M<N$$
$$0<a<1 \text{ なら}\ ,\quad \log_a M < \log_a N \iff M>N$$

証明. 対数関数のグラフを思い出す．$a>1$ のときは，$y=\log_a x$ のグラフの単調増加性（左下図）から，また，$0<a<1$ のときは，$y=\log_a x$ のグラフの単調減少性（右下図）から，主張が従う．

- $a>1$ のとき，



- $0<a<1$ のとき，



□

対数方程式の場合と同様に，対数不等式においても真数条件[1]に注意しなければならない．よく似た 4 つの不等式

(1). $\log_2(x^2+x-2)>2$　　(3). $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)>2$

(2). $\log_2(x^2+x-2)<2$　　(4). $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)<2$

を考えよう．まず，全ての不等式の真数条件を確認しておく．

- 不等式 (1), (2) の真数条件は，$x^2+x-2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2, 1<x$
- 不等式 (3), (4) の真数条件は，$x-1>0$ かつ $x+2>0 \Leftrightarrow x>1$

である．また全ての不等式の右辺は，$2=2\log_2 2=\log_2 2^2=\log_2 4$ と計算でき，底 2 は，1 より大きいことに注意すると，これらの不等式は，上で計算した真数条件のもとで[2]，

(1). $\log_2(x^2+x-2)>\log_2 4 \iff x^2+x-2>4 \iff x^2+x-6>0 \iff x<-3, 2<x$

(2). $\log_2(x^2+x-2)<\log_2 4 \iff x^2+x-2<4 \iff x^2+x-6<0 \iff -3<x<2$

(3). $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)>\log_2 4 \iff \log_2(x^2+x-2)>\log_2 4 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x<-3, 2<x$

(4). $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)<\log_2 4 \iff \log_2(x^2+x-2)<\log_2 4 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -3<x<2$

と計算できる．最後にそれぞれの真数条件との連立不等式を解くことで，次のように解を得る．

(1). $x<-3, 2<x$　　(2). $-3<x<-2,\ 1<x<2$　　(3). $2<x$　　(4). $1<x<2$

補足. (1) の解は，真数条件に関係していないように見える．これは真数条件の範囲に，解の範囲が含まれているからである．(1) の同値変形の途中に現れた不等式 $x^2+x-2>4$ を見ると，$4>0$ なので，この不等式を満たす解は，真数条件 $x^2+x-2>0$ も満たすことがわかる．

---

[1]対数 $\log_a M$ の真数 M は，その定義から必ず正の数であるという条件．

[2]すぐ後の同値変形は，それぞれの真数条件のもとで同値であるということに注意する．（これが重要！）