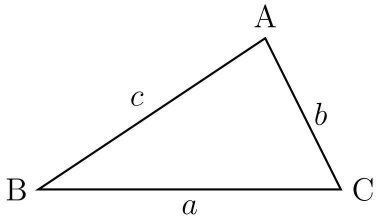
余弦定理

$\triangle$ABC に対して，頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ， a, b, c とし，$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C の大きさを，それぞれ，A, B, C とする．この時，次が成り立つ．



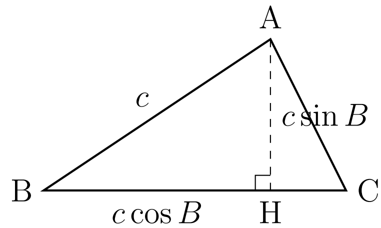
余弦定理

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

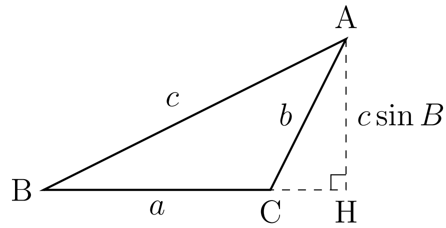
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

証明．記号の付け方を変えればどの場合も同じなので，$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ を示す．

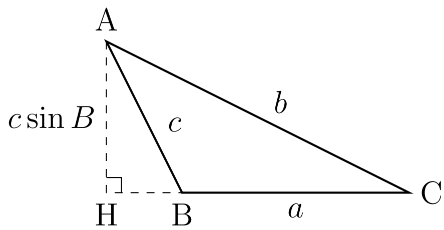
1. $B, C < 90^\circ$ のとき，
   A から，線分 BC に垂線をおろし，その交点を H とすると，三角比の定義から，$\mathrm{AH} = c\sin B$, $\mathrm{BH} = c\cos B$, $\mathrm{HC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BH} = a - c\cos B$ である．直角三角形 ACH に対して，三平方の定理を用いると，$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2$ から，等式
   $$b^2 = (c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2$$
   を得る．これを解けば，求める等式を得る．



2. $B < 90^\circ, 90^\circ < C < 180^\circ$ のとき，
   A から，線分 BC を C 側に延長した直線に垂線をおろし，その交点を H とすると，三角比の定義から，$\mathrm{AH} = c\sin B$，$\mathrm{BH} = c\cos B$，$\mathrm{CH} = \mathrm{BH} - \mathrm{CH} = c\cos B - a$ である．直角三角形 ACH に対して，三平方の定理を用いると，$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{CH}^2$ から，等式
   $$b^2 = (c\sin B)^2 + (c\cos B - a)^2$$
   を得る．これを解けば，求める等式を得る．



3. $90^\circ < B < 180^\circ, C < 90^\circ$ のとき，
   A から，線分 BC を B 側に延長した直線に垂線をおろし，その交点を H とすると，三角比の定義から，$\mathrm{AH} = c\sin\angle\mathrm{ABH} = c\sin(180^\circ - B) = c\sin B$，$\mathrm{HB} = c\cos\angle\mathrm{ABH} = c\cos(180^\circ - B) = -c\cos B$，$\mathrm{HC} = \mathrm{HB} + \mathrm{BC} = -c\cos B + a$ である．直角三角形 ACH に対して，三平方の定理を用いると，$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2$ から，等式
   $$b^2 = (c\sin B)^2 + (-c\cos B + a)^2$$
   を得る．これを解けば，求める等式を得る．



4. $B < 90^\circ, C = 90^\circ$ のとき，$\triangle$ABC は直角三角形である．三角比の定義から，$\cos B = \frac{a}{c}$ なので，$b^2 = c^2 - a^2$ が成り立つことを示せばよいが，これは三平方の定理より明らか．

5. $B = 90^\circ, C < 90^\circ$ のとき，$\cos B = \cos 90^\circ = 0$ である．よって，$b^2 = c^2 - a^2$ が成り立つことを示せばよいが，これは三平方の定理より明らかである．

□