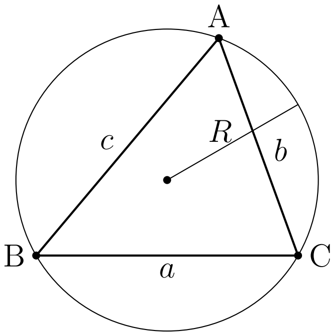
正弦定理

$\triangle \mathrm{ABC}$ に対して，頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ，a, b, c とし，$\angle \mathrm{A}, \angle \mathrm{B}, \angle \mathrm{C}$ の大きさを，それぞれ，A, B, C とする．また，$\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とする．この時，次が成り立つ．



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

証明. $a = 2R\sin A$ を示せば十分である．

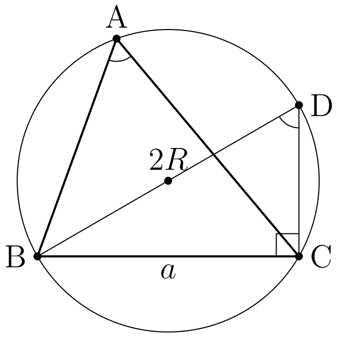
(i) $A < 90^\circ$ の時，
点 B に対して，線分 BD が外接円の直径となるように，点 D をとり，$\angle \mathrm{BDC} = \mathrm{D}$ とする．円周角の定理より，直径に対する円周角は，90° なので，$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$ である．よって，$\triangle \mathrm{BDC}$ は直角三角形であり，三角比の定義から，

$$a = 2R\sin D$$

を得る．再び，円周角の定理から，弧 BC に対する円周角は等しいので，$D = A$ が成り立つ．以上より，

$$a = 2R\sin D = 2R\sin A$$

が成り立つ．



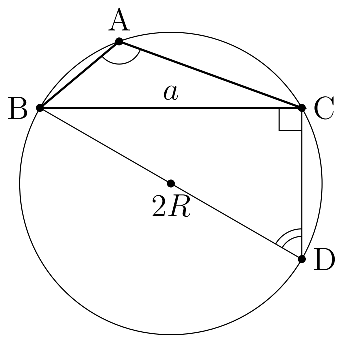
(ii) $A > 90^\circ$ の時，
点 B に対して，線分 BD が外接円の直径となるように，点 D をとり，$\angle \mathrm{BDC} = \mathrm{D}$ とする．円周角の定理より，直径に対する円周角は，90° なので，$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$ である．よって，$\triangle \mathrm{BDC}$ は直角三角形であり，三角比の定義から，

$$a = 2R\sin D$$

を得る．円に内接する四角形の対角の和は，180° なので，$D = 180^\circ - A$ が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned} a = 2R\sin D &= 2R\sin(180^\circ - A) \\ &= 2R\sin A \end{aligned}$$

が成り立つ．



(iii) $A = 90^\circ$ の時，
円周角の定理より，線分 BC は外接円の直径である．よって，$a = 2R$ である．また，$\sin A = \sin 90^\circ = 1$ なので，結果がしたがう．

□