２次関数の最大値・最小値

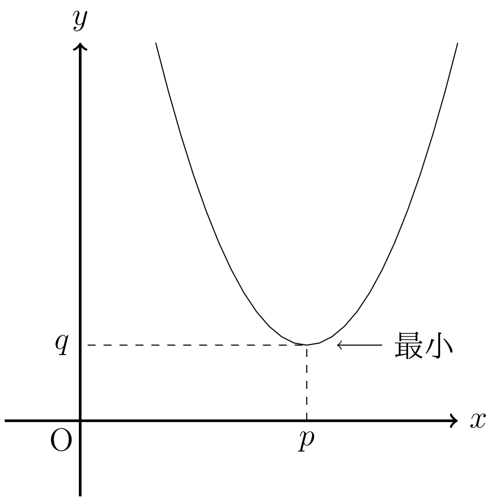
定義. 関数 $y = f(x)$ に対して，

- 変数 x がとりうる値の範囲を，この関数の**定義域**という．
- 変数 y がとりうる値の範囲を，この関数の**値域**という．
- 値域に最も大きな値があるとき，その値をこの関数の**最大値**という．
- 値域に最も小さな値があるとき，その値をこの関数の**最小値**という．

２次関数の最大値・最小値（定義域なし）

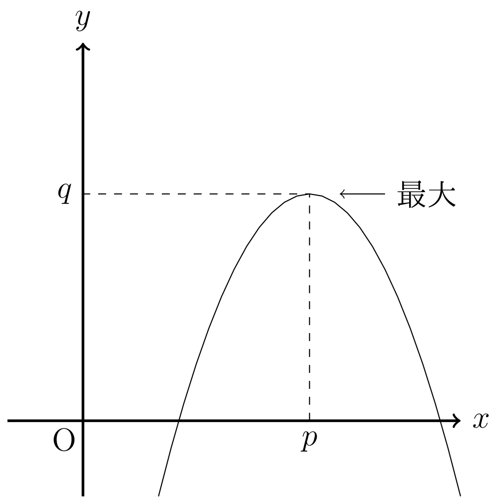
定義域が指定されていない場合，定義域は実数全体と考える．

1. $y = a(x^2 - p) + q \qquad (a > 0)$



グラフの形	：	下に凸
最大値	：	なし
最小値	：	q （頂点の y 座標）

2. $y = a(x^2 - p) + q \qquad (a < 0)$



グラフの形	：	上に凸
最大値	：	q （頂点の y 座標）
最小値	：	なし

$y = ax^2 + bx + c$ の形の２次関数は，

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と平方完成すると，頂点は，$\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ である事が分かる．よって，最大値・最小値は次のようになる．

$$a > 0 \text{ なら，} \begin{cases} \text{最大値は，} & \text{なし} \\ \text{最小値は，} & -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

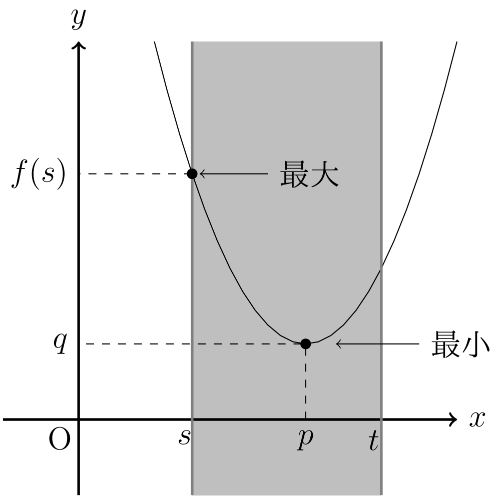
$$a < 0 \text{ なら，} \begin{cases} \text{最大値は，} & -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \\ \text{最小値は，} & \text{なし} \end{cases}$$

2次関数の最大値・最小値（定義域あり）

$f(x) = a(x^2 - p) + q$ とする．

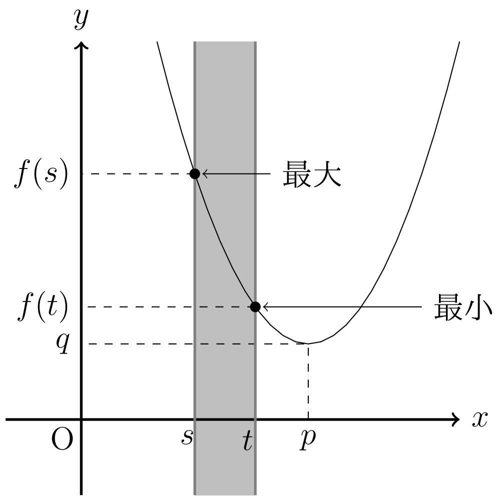
1. $y = f(x) \quad (a > 0) \quad$ (定義域：$s \leqq x \leqq t$)

(i) 定義域に頂点が含まれている場合．



グラフの形 ： 下に凸
最大値 ： $f(s)$
最小値 ： q （頂点の y 座標）

(ii) 定義域に頂点が含まれていない場合．



グラフの形 ： 下に凸
最大値 ： $f(s)$
最小値 ： $f(t)$

注意．(i) では，$|p - s| > |t - p|$ を仮定して図を描いているため，最大値を $f(s)$ としているが，$|p - s| < |t - p|$ であれば，最大値は $f(t)$ となることに注意する．すなわち，この場合の最大値は，（定義域の端点を比べたときに，）**「頂点から遠い方の点の y 座標」**である．
(ii) では，$s < t < p$ を仮定して図を描いているため，最大値を $f(s)$，最小値を $f(t)$ としているが，$p < s < t$ であれば，最大値は $f(t)$，最小値は $f(s)$ となることに注意する．すなわち，この場合の最大値は，（定義域の端点を比べたときに，）**「頂点から遠い方の点の y 座標」**であり，最小値は，**「頂点から近い方の点の y 座標」**である．

2. $y = a(x^2 - p) + q \quad (a < 0) \quad$ (定義域：$s \leqq x \leqq t$) ・・・図は略．

(i) 定義域に頂点が含まれている場合．

グラフの形 ： 上に凸
最大値 ： q （頂点の y 座標）

$$\text{最小値} \quad : \quad \begin{cases} f(s) & (|p-s| > |t-p|) \\ f(t) & (|p-s| < |t-p|) \end{cases}$$

(ii) 定義域に頂点が含まれていない場合．

グラフの形 ： 上に凸

$$\text{最大値} \quad : \quad \begin{cases} f(t) & (s < t < p) \\ f(s) & (p < s < t) \end{cases}$$

$$\text{最小値} \quad : \quad \begin{cases} f(s) & (s < t < p) \\ f(t) & (p < s < t) \end{cases}$$