## 最大値・最小値の原理

実数の連続性公理[1] を仮定して，次の最大値・最小値の原理[2] と呼ばれる定理を証明する．以下で度々用いられるボルツァーノ ・ワイエルシュトラスの定理[3] は実数の連続性公理と同値な定理である[4]．

**定理．** 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとき，$f(x)$ の $[a,b]$ における最大値と最小値が存在する．

まずは次の補題を証明する．

**補題．** 閉区間上で連続な関数は有界である．

証明．関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．$f(x)$ が有界でないとすると，上界または下界が存在しないので，$n$ に対して，$a \leq a_n \leq b$ であって，

$$|f(a_n)| > n \tag{1}$$

を満たす実数 $a_n$ が存在する．この $a_n$ を第 $n$ 項とする数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると，その作り方から，全ての自然数 $n$ に対して，$a \leq a_n \leq b$ が成り立っているので，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界数列である．ボルツァーノ ・ワイエルシュトラスの定理から，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を持つ．そこで，その極限値を $a \leq \alpha \leq b$，すなわち，

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha \tag{2}$$

とする．$f(x)$ の連続性から，$\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ が成り立つので，これと (2) から，

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(\alpha)$$

が成り立つ[5]．さらに，数列の極限の性質から，

$$\lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k})| = |f(\alpha)| \tag{3}$$

が従う．

一方，$n_k$ は狭義単調増加である自然数の列として定められていたので，$n_k \geq k$ ある．これと，(1) と合わせて，

$$|f(a_{n_k})| > n_k \geq k$$

が成り立つ．よって，$k \to \infty$ のとき，$|f(a_{n_k})| \to \infty$ すなわち，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k})| = \infty$ となるが，これは，(3) に矛盾である．よって，$f(x)$ は有界である．□

---

[1]空でない実数全体の集合の部分集合が．上に有界（下に有界）なら，上限（下限）が存在する．

[2]主張は直感的には明らかであるが，高校数学の範囲では証明できないので，高校では「原理」と呼ばれ，証明なしに認められている事実である．しかし，これは厳密に証明される「定理」である．

[3]有界な数列は，収束する部分列をもつ．

[4]詳しくは，https://gleamath.com/continuity-of-real-numbers02 を参照．

[5]部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は，任意の $k$ に対して，$a_{n_k} \neq \alpha$ を仮定できる．実際，途中 $a_{n_k} = \alpha$ となるものがあれば，それを除いて部分列を定義すれば良い．詳しくは，https://gleamath.com/lim-of-funcs-and-seqs02 を参照．

上の補題を用いて，定理を証明する．

*最大値最小値の原理の証明.* 上の補題から，$f(x)$ は有界である．よって，実数の連続性公理から，閉区間 $[a,b]$ における上限が存在するので，これを

$$s := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

とおく．$f(c) = s$ となる $c \in [a,b]$ が存在すれば，$f(c)$ が最大値であるから，このような $c$ の存在を示せば良い．

任意の自然数 $n$ に対して，$s - \frac{1}{n}$ は，$f(x)$ の上界ではないので，

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n)$$

を満たす $x_n \in [a,b]$ が存在する．一方，上限の定義から任意の $x \in [a,b]$ に対して，$s - f(x) \geq 0$ が成り立つので，上と合わせて，

$$0 \leq s - f(x_n) < \frac{1}{n} \tag{4}$$

が成り立つ．

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界なので，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から，収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ を持つ．そこで，$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ とすると，$c \in [a,b]$ であり，$f(x)$ の連続性から，

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \tag{5}$$

が成り立つ．

一方，$0 < k \leq n_k$ から，$\dfrac{1}{n_k} \leq \dfrac{1}{k}$ が成り立つので，(4) と合わせて，

$$0 \leq s - f(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$$

が従う．$k \to \infty$ のとき，$\frac{1}{k} \to 0$ なので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s \tag{6}$$

が成り立つ．よって，(5) と (6) から，

$$f(c) = s$$

が従う．

最小値の存在については，$g(x) = -f(x)$ として，$g(x)$ について同様の議論を行えば良い． □