整式の計算

定義.
- **単項式**とは，数や文字を掛け合わせてできる式の事をいう．
- **単項式の係数**とは，単項式の数の部分の事をいう．
- **単項式の次数**とは，掛け合わされている文字の個数の事をいう．

数だけの単項式の次数は 0 と考える．しかし，数 0 の次数は定めない．また，複数の文字を含む単項式において，特定の文字に着目して係数や次数を考える事があるが，その場合，着目した文字以外の文字は数と考える．

例. $-3abx^2$ について，文字 x に着目した時の次数と係数はそれぞれ，2 と，$-3ab$ である．

定義.
- **多項式**とは，いくつかの単項式の和として表される式の事をいう．
- **多項式の項**とは，多項式を構成する各単項式の事をいう．
- **整式**とは，単項式と多項式の事をいう．
- **同類項**とは，整式の項の中で文字の部分が同じ項の事をいう．

同類項は，ひとつにまとめて整理する事ができる．

例. $3x^2 + 2x + 5x + 6x^2 = 9x^2 + 7x$

定義. 同類項をまとめて整理した整式において，
- **整式の次数**とは，もっとも次数の高い項の次数のことをいう．
- **n 次式**とは，次数が n の整式の事をいう．
- **定数項**とは，文字を含まない項の事をいう．

定義. 整式をある文字に着目して整理するとき，
- **降べきの順に整理する**とは，項の次数が低くなる順に整理する事をいう．
- **昇べきの順に整理する**とは，項の次数が高くなる順に整理する事をいう．

整式の計算法則

A, B, C を整式とする．
- 交換法則　（加法）　$A + B = B + A$　（乗法）　$AB = BA$
- 結合法則　（加法）　$(A + B) + C = A + (B + C)$　（乗法）　$(AB)C = A(BC)$
- 分配法則　$A(B + C) = AB + AC$

定義.
- 文字 a を n を掛けたものを **a の n 乗**といい，a^n とかく．
- **a^n の指数**とは，n の事をいう．
- **a^n の底**とは，a の事をいう．
- **a の累乗**とは，$a^1, a^2, a^3, \cdots$ の事をいう．

指数法則

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$

展開公式

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   $(a+b)^n = a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$
2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
3. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
4. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
5. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

   $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$
6. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
7. $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

1. $(a-b)^n$ の場合は，上記の b に $-b$ を代入すればよい．

$$\begin{array}{lrcl} \text{例.} & (a-b)^3 & = & a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ & & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

3. $a = c = 1$ の場合は，もっと簡単になる．

$$(x+b)(x+d) = x^2 + (b+d)x + bd$$

4. b に $-b$ を代入した形も覚えておくと良い．

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

5. $(a+b+c)^3$ については，次の形も覚えておくと良い．

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

6. 展開公式 5. を使うと導く事ができる．

$$\begin{array}{rcl} (\text{左辺}) & = & (a+b+c)\{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3(ab+bc+ca)\} \\ & = & (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\} \\ & = & (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) \quad = (\text{右辺}) \end{array}$$