多項定理

よく知られた二項定理の拡張である多項定理について証明する．

そのために，まずは二項定理を思い出す：

二項定理

$(a+b)^n$ の展開式において，$n=p+q$ とするとき，$a^p b^q$ の項の係数は，

$$\frac{n!}{p!q!}=\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

である．

注意． 二項定理を，次の形で学習した人も多いと思う：

$$a^{n-r}b^r \text{ の項の係数は，} {}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ である．}$$

これに対して，$n=p+q$，$r=q$ としたものが上で紹介した形である．一般化のためにこのような形で書き換えたが，同じことを言っているだけである．

多項定理は次の形である．

多項定理

$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$ の展開式において，$n=p_1+p_2+\cdots+p_m$ とするとき，
$a^{p_1}a^{p_2}\cdots a^{p_m}$ の項の係数は，

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_m)!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}$$

である．

証明．項数 m に関する帰納法で証明する．

- $m=2$ のときは，二項定理より成り立つ．
- $m=k$ のとき，上が成り立つと仮定して，$m=k+1$ のときを考える．

  $$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^n=\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\}^n$$

  なので，二項定理を用いて，$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^{n-p_{k+1}}\cdot a_{k+1}^{p_{k+1}}$ の係数は，${}_n\mathrm{C}_{p_{k+1}}$ とわかる．
  また，

  $$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^{n-p_{k+1}}=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^{p_1+\cdots+p_k}$$

  の展開式において，帰納法の仮定から，$a^{p_1}a^{p_2}\cdots a^{p_k}$ の項の係数は，$\dfrac{(p_1+p_2+\cdots+p_k)!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$ である．以上から，$(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})^n$ の展開式において，$a^{p_1}a^{p_2}\cdots a^{p_{k+1}}$ の項の係数は，

  $${}_n\mathrm{C}_{p_{k+1}}\cdot\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_k)!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}=\frac{n!}{(n-p_{k+1})!p_{k+1}!}\cdot\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_k)!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}=\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_{k+1}!}$$

  となる．

以上より結果が従う．□