Newton，プリンキピア　第二巻　第二部　補助定理Ⅱ

Newton において，微分の概念は「流率」(fluxion) として出現する．この理論が固まったのは，1666 年頃だと言われているが，流率というものが初めて公表されたのは，1687 年出版の「**プリンキピア**[1]」と呼ばれる書物だった．

プリンキピア第二巻第二部の補助定理Ⅱでは，

- 運動あるいは流動して絶えず増加または減少している量を，**生成量 (genitum)**，
- 生成量の瞬間的な増減のことを**モーメント (momentum)**

と呼び，次のような事が述べられている．

任意の生成量 A, B のモーメントを a, b とするとき，長方形の面積 AB のモーメントは，$aB + bA$ である．

これは，現代の言葉で述べると，合成関数の積の微分に対応している．つまり，

t の関数 $A := A(t), B := B(t)$ の導関数をそれぞれ，$a := A'(t), b := B'(t)$ をとする．この時，AB すなわち，$A(t)B(t)$ の導関数は，$aB + bA$ すなわち，$A'(t)B(t) + B'(t)A(t)$ である．

という事を述べている．そして，補助定理Ⅱの後の命題 8 において，

- 生成量のことを**流量 (fluens)**，
- モーメントのことを**流率 (fluxio)**

と呼ぶ事が述べられている．

それでは，実際に補助定理Ⅱを紹介しよう．$A^n, A^{-n}, A^{\frac{m}{n}}$ などの一般の場合のモーメントについても述べられているのがわかると思う．ただし，これは原典の正確な写しではなく，要約であることを注意しておく．

プリンキピア　第二巻　第二部　補助定理Ⅱ

任意の生成量 A, B, C のモーメントを a, b, c とするとき，

(i) 長方形の面積 AB のモーメントは，$aB + bA$ である．

(ii) 体積 ABC のモーメントは，$aBC + bAC + cAB$ である．

(iii) 生成量 A^2, A^3, A^n のモーメントは，それぞれ $2aA, 3aA^2, naA^{n-1}$ である．

(iv) 生成量 A^{-1}, A^{-n} のモーメントは，それぞれ $-aA^{-2}, -naA^{n+1}$ である．

(v) 生成量 $A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{m}{n}}$ のモーメントは，それぞれ $\dfrac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \dfrac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ である．

(vi) 生成量 A^mB^n のモーメントは，$maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$ である．

[1]「自然哲学の数学的原理」(Principia mathematica philosophiae naturalis)

証明.　(i) AB のような任意の長方形の面積の辺 A, B が連続的な変動によって増しつつあるとする．これらのモーメント a, b の半分だけが不足しているとき，その面積は，

$$\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right)=AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$$

であり，半分だけが増したとき，その面積は，

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$$

である．この長方形の面積から，前の長方形の面積を引けば，増分 $aB+bA$ がでる．したがって，辺の全増分 a, b によって，増分 $aB+bA$ が生成される．

(ii) AB が常に，G に等しいとすれば，体積 ABC すなわち GC のモーメントは，(i) により，$gC+cG$ である．（ここで，G のモーメントを g としている．）G および，g の代わりに，AB および，$aB+bA$ とすれば，$aBC+bAC+cAB$ が得られる．

(iii) 辺 A, B, C が常に互いに等しいとすれば，A^2 のモーメント，すなわち AB のモーメント $aB+bA$ は，$2aA$ である．A^3 のモーメントも，ABC のモーメントが $aBC+bAC+cAB$ である事より，$3aA^2$ である．同様に推論すれば，A^n のモーメントは，naA^{n-1} である．

(iv) $\dfrac{1}{A}$ と A との積は 1 であるから，$\dfrac{1}{A}$ のモーメントと A との積と，$\dfrac{1}{A}$ と a（A の流率）との和は，1 のモーメント，すなわち零に等しい．よって，$\dfrac{1}{A}$ のモーメント，すなわち A^{-1} のモーメントは，$-\dfrac{a}{A^2}$ である．また一般に，$\dfrac{1}{A^n}$ と A^n との積は 1 であるから，$\dfrac{1}{A^n}$ のモーメントと A^n との積と，$\dfrac{1}{A^n}$ と naA^{n-1}（A^n のモーメント）との和は，零である．したがって，$\dfrac{1}{A^n}$ のモーメント，すなわち A^{-n} のモーメントは，$-\dfrac{na}{A^{n+1}}$ である．

(v) $A^{\frac{1}{2}}$ と $A^{\frac{1}{2}}$ の積は A であるから，(iii) により，$A^{\frac{1}{2}}$ のモーメントと $2A^{\frac{1}{2}}$ の積は a である．したがって，$A^{\frac{1}{2}}$ のモーメントは，$\dfrac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$ である．また一般に，$A^{\frac{m}{n}}$ を B とおけば，A^m は B^n に等しい．したがって maA^{m-1} は nbB^{n-1} に等しい．また maA^{-1} は nbB^{-1} あるいは $nbA^{-\frac{m}{n}}$ に等しい．したがって，$\dfrac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ は b，すなわち $A^{\frac{m}{n}}$ のモーメントに等しい．

(v) 生成量 A^mB^n のモーメントは，A^m のモーメントと B^n との積と，B^n のモーメントと A^n との積の和に等しい．すなわち，$maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$ である．

$\square$