場合の数

定義.
- 同じ条件下で繰り返し行うことのできる実験や観察などのことを**試行**といい，
- 試行によって，起こる結果のことを**事象**という．
- ある事象の起こり方の総数のことを**場合の数**という．

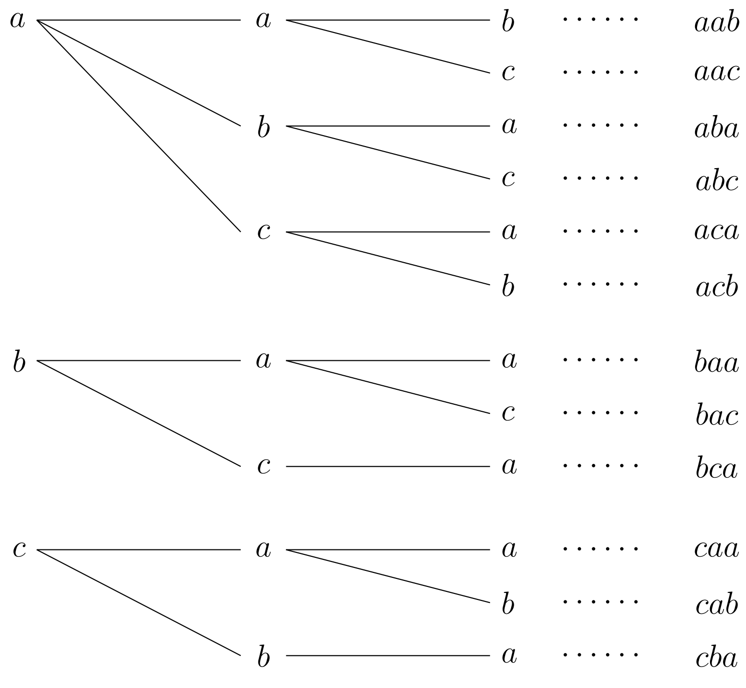
ある事象の場合の数を数えるときは，<u>もれなく</u>，<u>重なりなく</u>数える必要がある．そのためには，ある規則に基づいて，順序正しく数えることが大切である．

例えば，アルファベット a, a, b, c を 1 列に並べる場合の数を数える．

$$abc, cab, bac, aca, \cdots$$

のように規則を付けずに単に書き出す方法だと，全て数え上げたと思っても，漏れや重なりが生じてしまう可能性がある．このようなことがないように，場合の数をきちんと数えるためのよく知られた方法を紹介する．この例で用いられる図は**樹形図**と呼ばれる．

例. アルファベット a, a, b, c を 1 列に並べる場合の数を数える．
３種類の文字 a, b, c に，$a \to b \to c$ の順番で優先順位をつけて，下のように順序正しく書き出す．



よって，求める場合の数は，12 通りである．

注意. 樹形図を使う方法の本質は，樹木のような絵を描くことではなく，**優先順位をつけて順序正しく数える**という部分である．樹形図はわかりやすいが描くためには多くのスペースを必要とするので，慣れれば書く必要はない．上で述べたように，

$$aab, aac, aba, abc, aca, \cdots, cba$$

のように，優先順位をつけて順序正しく書き出す方法で十分である．このような方法は，**辞書式配列法**と呼ばれることもあるが，本質は樹形図を描くことと同じである．

場合の数を数えあげる際に，樹形図で全てを数えあげるのではなく，次のような法則を意識することが大切である．

和の法則

> 2つの事象 A, B が<u>同時には起こらない</u>とする．事象 A の場合の数が m 通り，事象 B の場合の数が n 通りとするとき，事象 A または B が起こる場合の数は，<u>$m+n$ 通り</u>である．

例． 大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が4の倍数になる場合の数を求めよ．

2つのさいころの目の和の可能性は，$1, 2, 3, \cdots, 12$ なので，このうち，4の倍数であるものは，$4, 8, 12$ である．ここで，

- 目の和が4であるという事象を事象 A,
- 目の和が8であるという事象を事象 B,
- 目の和が12であるという事象を事象 C

とする．<u>3つの事象 A, B, C は同時に起こらない</u>（例えば，目の和が4であり8であるということはあり得ない）ので，和の法則から，それぞれの事象の場合の数を求めて，その和を求めれば，それが求める場合の数である．

大きいさいころの目を x，小さいさいころの目を y とかき，2つのさいころの目の組みを (x, y) と書く．

- 事象 A の場合の数：$x+y=4$ となる組 (x, y) は，$(1,3), (2,2), (3,1)$ の3通りである．
- 事象 B の場合の数：$x+y=8$ となる組 (x, y) は，$(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$ の5通りである．
- 事象 C の場合の数：$x+y=12$ となる組 (x, y) は，$(6,6)$ の1通りである．

以上より，求める場合の数は，$3+5+1=9$ 通りである．

積の法則

> 事象 A の場合の数が m 通りであるとし，その各々において，事象 B の場合の数が n 通りであるとする．このとき，事象 A と B が<u>ともに起こる</u>場合の数は，<u>mn 通り</u>である．

例． 大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の積が奇数となる場合の数を求めよ．

2つのさいころの目の積が奇数となるのは，どちらの目も奇数であるときである．ここで，

- 大きいさいころの目が奇数であるという事象を事象 A,
- 小さいさいころの目が奇数であるという事象を事象 B

とする．さいころの目は，$1, 2, 3, 4, 5, 6$ であり，そのうち奇数は，$1, 3, 5$ である．よって，

- 事象 A の場合の数：$1, 3, 5$ の3通りである．
- 事象 B の場合の数：$1, 3, 5$ の3通りである．

事象 A の3通りの場合の各々において，事象 B の3通りが起こる．求める場合の数は，事象 A と B がともに起こる場合の数なので，積の法則から，それぞれの場合の数の積を求めればよい．よって，求める場合の数は，$3 \times 3 = 9$ 通りである．

注意． 上で紹介した2つの例において，さいころの目の和に関するものが和の法則，積に関するものが積の法則<u>**というわけではない**</u>ことに注意する．例えば，積の法則で扱った例において，「積が奇数」を「積が偶数」に読み替えると，この場合，大小それぞれのさいころの目が，（偶, 偶），（偶, 奇），（奇, 偶）である場合を考えなければならず，（それぞれの場合の数を求めるのには積の法則を使用するが，）これらは同時に起こらないので，最後には和の法則を用いて，3つの事象の場合の数の和を求めることになる．この辺りは混乱しやすいので注意する．