要素の個数

定義.
- 要素の個数が有限個である集合を**有限集合**といい，
- 無限に多くの要素を持つ集合を**無限集合**という．

例.
- 集合 $A=\{1,2,3\}$ や，集合 $B=\{x \mid x$ は整数$, |x|<5\}$ は有限集合であり，
- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ や，集合 $C=\{x \mid x$ は実数$, |x|<5\}$ は無限集合である．

定義. 有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す．

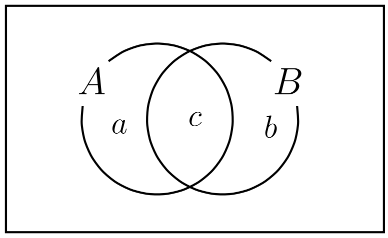
例. 上の例の集合 A, B において，$n(A)=3$，$n(B)=9$ である．

以下では，有限集合 U を全体集合とし，その部分集合を考えることにする．すなわち単に集合と言えば有限集合を表すこととする．

2 つの集合の和集合の要素の個数や，補集合の要素の個数は，次のように表すことができる．

> **定理.** 2 つの集合 A, B の要素の個数に対して，次が成り立つ．
> - $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
>   特に，$A\cap B=\varnothing$ なら，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
> - $n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

証明. 右図のように要素の個数 a, b, c を定めると，
$n(A\cap B)=c$，$n(A)=a+c$，$n(B)=b+c$ である．よって，



$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= a+b+c \\ &= (a+c)+(b+c)-c \\ &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{aligned}$$

が従う．後半は，$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow n(A\cap B)=0$ からわかる．

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$ については，$\overline{A}$ の定義から明らかである． □

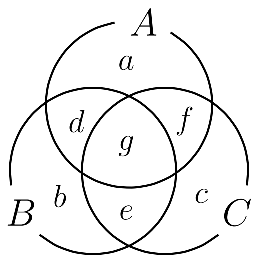
補足. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ について，
$n(A)+n(B)$ だと重なっている部分 $n(A\cap B)$ を 2 回足していることになるので，多い分 1 回だけ $n(A\cap B)$ を引いていると考えれば良い．

3 つの集合の和集合についての結果も紹介する．

> **定理.** 3 つの集合 A, B, C の要素の個数に対して，次が成り立つ．
> $$\begin{aligned} &n(A\cup B\cup C) \\ &\quad = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

証明. 右図のように要素の個数 a, b, c, d, e, f, g を定めると次のように計算ができる．

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= a+b+c+d+e+f+g \\ &= a+b+c+2(d+e+f)+3g-(d+e+f+2g) \\ &= (a+d+f+g)+(b+d+e+g)+(c+e+f+g) \\ &\qquad -\{(d+g)+(e+g)+(f+g)-g\} \\ &= n(A)+n(B)+n(C) \\ &\quad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$



□