偶数桁の回文数は 11 の倍数

定義. n を正の整数とする．n 桁の**回文数**とは，n 桁の正の整数であって，$a+b=n-1$ を満たす非負整数 a,b に対して，10^a の位（$a+1$ 桁目）の数と，10^b の位（$b+1$ 桁目）の数が等しい数のことをいう．ただし，記数法は十進法であるとする．

例. 例えば，12321 や 916619 は，回文数である．

本稿の目標は次の定理を証明することである．

定理. 偶数桁の回文数は，11 の倍数である．

説明のためにもう 1 つ言葉を定義する．

定義. 全ての桁の数が同じであるような正の整数を**ゾロ目数**という．

例. 例えば，1111 や 55555 は，ゾロ目数である．

まずは，次の補題を証明する．

補題. 偶数桁のゾロ数は，11 の倍数である．

証明. n を正の整数とする．$2n$ 桁のゾロ目数 R は，a を 1 桁の正の整数とすると，

$$R = a(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + 10^{2n-3} + 10^{2n-4} + \cdots + 10^1 + 10^0)$$

の形で書ける．これを変形すると，

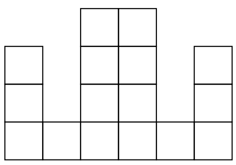
$$\begin{aligned} R &= a\left\{10^{2n-2}(10+1) + 10^{2n-4}(10+1) + \cdots + 10^0(10+1)\right\} \\ &= 11a(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \cdots + 10^0) \end{aligned}$$

となり，11 の倍数であることが従う． □

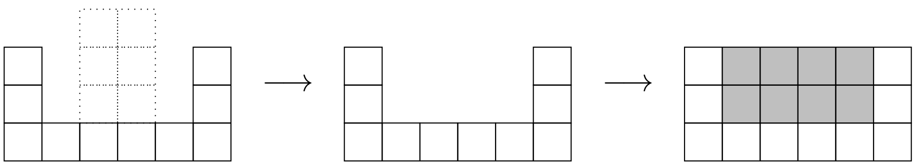
例. $777777 = 11 \cdot 7 \cdot 10101$ である．

この補題より，偶数桁の回文数に「11 の倍数を足す（引く）」という操作を繰り返し行い，ゾロ目数にすることができれば，もとの回文数が 11 の倍数であることが従う．

定理の証明を述べる前に，そのイメージを説明する．例えば，6 桁の回文数 314413 を，次のようにブロックを積み上げた形のように考える．



ここから次のように，長方形のブロックを加えたり取り除いたりして，ゾロ目数を作る．



この「長方形のブロックを加える（取り除く）」という操作は，「偶数桁のゾロ目数の倍数を足す（引く）」ということに対応しており，上の補題から，偶数桁のゾロ目数は 11 の倍数であるので，結果が従う．という流れである．[1]

[1] 下では桁数に関する数学的帰納法によって定理を証明する．すなわち，「（考えている回文数より桁数の少ない）回文数の倍数を足す（引く）」という操作を用いることになるが，これは，ここで述べたイメージのように，「ゾロ目数の倍数を足す（引く）」という操作を，いくつか合わせることで作られる操作である．

それでは，定理を証明する．

定理の証明. n を正の整数とする．$2n$ 桁の回文数が 11 の倍数であることを，n に関しての帰納法で証明する．

- $n = 1$ のとき，
  2 桁の回文数はゾロ目数である．よって上の補題より，11 の倍数である．

- $n = 1, 2, \cdots, k$ のとき，定理の主張が成り立つと仮定して，$n = k + 1$ のときを考える．
  任意の $2(k + 1) = 2k + 2$ 桁の回文数を P とすると，

  $$P = a_{2k+1} \cdot 10^{2k+1} + a_{2k} \cdot 10^{2k} + a_{2k-1} \cdot 10^{2k-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

  とかける．ここで，$a_0, a_1, \cdots, a_{2k+1}$ は，

  1. $a_{2k+1} \neq 0, a_0 \neq 0$
  2. $i + j = 2k + 1$ を満たす非負整数 i, j に対して，$a_i = a_j$

  を満たす 1 桁の非負整数である．
  さらに，次のように正の整数 a, b_i, c_i（$i = 1, 2, \cdots, 2k$）を

  $$a = a_{2k+1} = a_0, \qquad b_i = \max\{a_i - a, 0\}, \qquad c_i = \max\{a - a_i, 0\}$$

  と定める．さらに，これを用いて，P', P'' を

  $$P' = b_{2k} \cdot 10^{2k} + b_{2k-1} \cdot 10^{2k-1} + \cdots + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10^1$$
  $$P'' = c_{2k} \cdot 10^{2k} + c_{2k-1} \cdot 10^{2k-1} + \cdots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1$$

  と定めると，回文数 P は次のように表せる．

  $$P = a(10^{2k+1} + 10^{2k} + 10^{2k-1} + \cdots + 10^2 + 10^1 + 10^0) + P' - P''. \tag{1}$$

  ここで，

  $$a(10^{2k+1} + 10^{2k} + 10^{2k-1} + \cdots + 10^2 + 10^1 + 10^0)$$

  はゾロ目数なので，上の補題より 11 の倍数である．また，P', P'' は，その定義から，桁数が $2k$ 以下の回文数の倍数なので，帰納法の仮定から 11 の倍数である．よって，P の表し方 (1) から，P は 11 の倍数であることが従う．

以上より，定理の主張が従う． □

上の定理は，次のように高次式の因数の考察に応用できる．

例. $3x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 3$ を因数分解しよう．
$P(x) = 3x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 3$ とおくと，$P(10) = 314413$ は，偶数桁の回文数である．
上の定理から，$P(10)$ は 11 で割れるが，これは，$P(x)$ が $x + 1$ で割れることに対応している．
よって，

$$P(x) = (x + 1)(3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 3) = (x + 1)(x^2 + 1)(3x^2 - 2x + 3)$$

と因数分解できる．[2] [3]

---

[2] 因数定理を知っていれば，$P(-1) = 0$ となることから，$P(x)$ が $x + 1$ を因数に持つことは，すぐにわかるので，ここに述べた応用の必要性は薄いかもしれない．しかし，与えられた高次式の係数が回文数であることは，一目で分かるので，$P(-1)$ を計算する際の助けになるかもしれない．

[3] 因数分解 $3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 3 = (x^2 + 1)(3x^2 - 2x + 3)$ には，今回の定理は関係していない．しかし，この等式は，奇数桁の回文数を考察することの有用性を物語っているようにも見える．