$\frac{1}{6}$ 面積公式

命題 ($\frac{1}{6}$ 公式)**.** 定数 α, β に対して，次が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\ dx \ = \ -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

証明．次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\ dx &= \int_\alpha^\beta \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}\ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{(\alpha+\beta)}{2}x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \frac{(\alpha+\beta)}{2}(\beta^2-\alpha^2) + \alpha\beta(\beta-\alpha) \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\left\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2) - 3(\alpha+\beta)^2 + 6\alpha\beta\right\} \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2) \qquad = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

□

注意. 上の公式は，その結果の形から $\frac{1}{6}$ 公式と呼ばれることが多い．

$\frac{1}{6}$ 公式は，次のように言い換えることができる．

命題 ($\frac{1}{6}$ 公式)**.** 放物線 $C : y = x^2 + bx + c$ と，直線 $\ell : y = px + q$ が，異なる 2 点 A，B で交わっているとし，点 A, B の x 座標をそれぞれ，α, β $(\alpha < \beta)$ とする．このとき，放物線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \ = \ \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

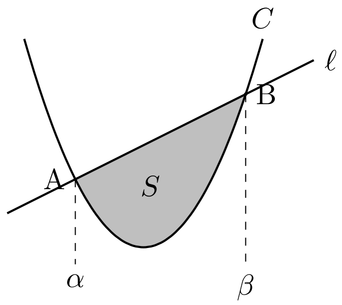
証明．放物線 C と直線 ℓ が，x 座標を α, β にもつ異なる 2 点で交わっているということと，二次方程式

$$x^2 + bx + c = px + q \qquad (1)$$

の解が

$$x = \alpha,\ \beta$$

であるということは同じである．放物線 C は下に凸であるから，C と直線 ℓ の位置関係は，右図のようになり，



$$S = \int_\alpha^\beta \left\{(px+q) - (x^2+bx+c)\right\}\ dx \qquad (2)$$

が成り立つ．ここで，二次方程式 (3) の解が $x = \alpha, \beta$ であることから，(2) の被積分関数は，

$$(px+q) - (x^2+bx+c) = -(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解できる．これと上の $\frac{1}{6}$ 公式から，

$$S = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\ dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

が成り立つ．

□

上の命題よりさらに一般の放物線について考える．すなわち，放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ と，直線 $\ell : y = px + q$ で囲まれる部分の面積について考える．この場合も上とほとんど同様に，交点の x 座標から面積を求めることができる．

命題 ($\frac{1}{6}$ 公式)**.** 放物線 $C : y = ax^2+bx+c$ と，直線 $\ell : y = px+q$ が，異なる 2 点 $(\alpha, *), (\beta, *)$ で交わっているとする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \ = \ \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

証明. a の符号によって，放物線 C と直線 ℓ の位置関係が異なることに注意しなければならないが，方程式

$$ax^2 + bx + c = px + q \qquad (3)$$

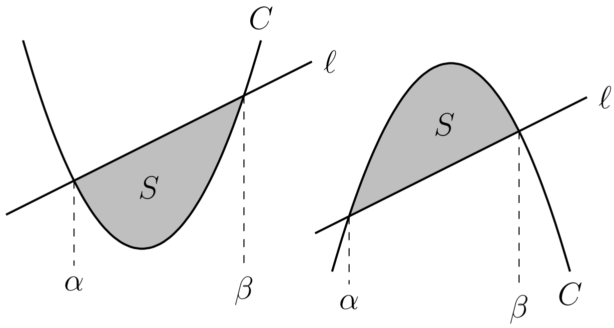
の解が

$$x = \alpha,\ \beta$$

であるということは上の命題と同じであり，

$$(ax^2 + bx + c) - (px + q) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる．放物線 C と直線 ℓ の位置関係は，$a > 0$ なら左側図，$a < 0$ なら右側図のようになるので，求める面積はそれぞれ，



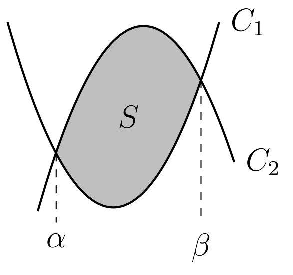
$(a > 0)$　　　$(a < 0)$

$$S = -a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\ dx \quad (a > 0), \qquad S = a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\ dx \quad (a < 0)$$

と計算できるので，どちらの場合においても $\frac{1}{6}$ 公式から，主張が従う． □

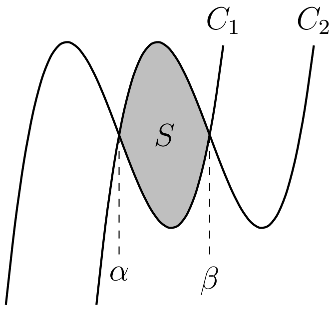
$\frac{1}{6}$ 公式の応用は，さらに広い．上では放物線と直線の場合を考察したが，そうでない場合においても，被積分関数が異なる 2 つの実数解をもつ二次関数であれば，$\frac{1}{6}$ 公式を使うことができる．（これは最初の命題を見れば明らかであろう．）例えば次のような場合である．以下で，2 曲線はいずれも異なる 2 点 $(\alpha, *), (\beta, *)$ で交わっているものとする．

- 2 つの放物線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積 S



$$\begin{cases} C_1 : a_1x^2 + b_1x + c_1, \\ C_2 : a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \quad \text{とすると，} \quad S = \frac{|a_1 - a_2|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

- x^3 の係数が同じである 2 つの三次曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積 S



$$\begin{cases} C_1 : dx^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1, \\ C_2 : dx^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \quad \text{とすると，} \quad S = \frac{|a_1 - a_2|}{6}(\beta - \alpha)^3$$