$\frac{1}{3}$ 面積公式

命題 ($\frac{1}{3}$ 公式)．定数 α, β に対して，次が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\ dx \ = \ \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

証明．次のように計算できる：$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\ dx = \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$ □

この当たり前の計算をわざわざ $\frac{1}{3}$ 公式と呼ぶのは，次のような状況が良く現れるからである．

命題 ($\frac{1}{3}$ 公式)．$f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．放物線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線を ℓ とする．このとき，直線 $x = \beta$ と放物線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

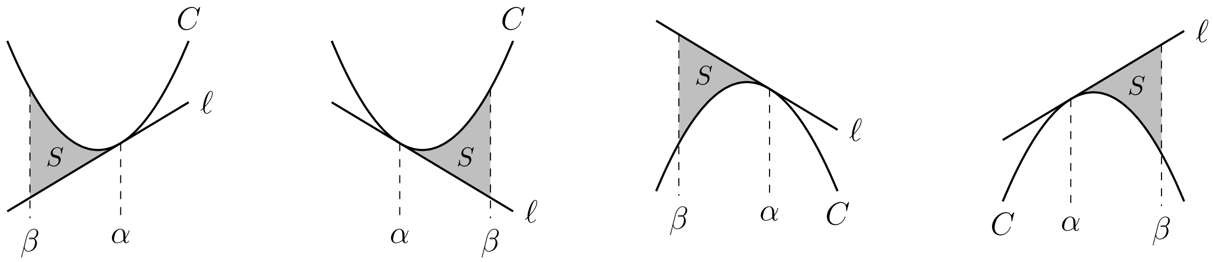
$$S \ = \ \frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3$$

証明．接線 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とおくと，C との接点の x 座標が α であることから，

$$f(x) - g(x) = a(x-\alpha)^2$$

と因数分解できる．よって S は，下図のどの場合においても，次のように計算できる．

$$S = \left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2\ dx\right| = |a|\left|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\ dx\right| = \frac{|a|}{3}|\beta-\alpha|^3$$



□

次のような場合にも $\frac{1}{3}$ 公式を用いることができる．

命題 ($\frac{1}{3}$ 公式)．$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$，$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ とする．2 つの放物線 $C_1 : y = f_1(x)$，$C_2 : y = f_2(x)$ が 1 点 $(\alpha, f_1(\alpha))$ で接しているとする．このとき，直線 $x = \beta$ と放物線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \ = \ \frac{|a_1 - a_2|}{3}|\beta-\alpha|^3$$

証明．仮定から，次のように因数分解できる．

$$f_1(x) - f_2(z) = (a_1 - a_2)(x-\alpha)^2$$

よって，上の命題と同様にして，結果が従う． □