$\frac{1}{30}$ 面積公式（四次曲線と複接線）

命題 ($\frac{1}{30}$ 公式)**.** 定数 α, β に対して，次が成り立つ．

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ dx \ = \ \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

証明．部分積分法を繰り返し用いて，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ dx &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3(x-\beta)^2\right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3(x-\beta)\ dx \\
&= -\frac{2}{3}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3(x-\beta)\ dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(x-\alpha)^4(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4\ dx \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^4\ dx \\
&= \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}(x-\alpha)^5\right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}$$

□

$\frac{1}{30}$ 公式は，次のように言い換えることができる．

命題 ($\frac{1}{30}$ 公式)**.** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$ とし，四次曲線 $C : y = f(x)$ が複接線 ℓ を持つとする．[a] さらに，C と ℓ の異なる 2 つの接点を $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ とする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \ = \ \frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$$

[a] 複接線の存在条件：https://gleamath.com/double-tangent-of-quartic-function/

証明．接線 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とすると，仮定から，

$$f(x) - g(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

と因数分解できる．よって，求める面積 S は，$\frac{1}{30}$ 公式を用いることにより，

$$S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ dx\right| = \frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$$

と計算できる． □