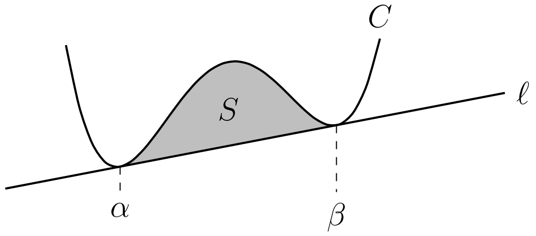
４次関数と複接線で囲まれる部分の面積

4 次関数とその複接線で囲まれる部分の面積について考察する．



関数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ (a \neq 0)$ を考える．曲線 $C : y = f(x)$ が複接線 ℓ を持つための必要十分条件[1] は，

$$D := 3b^2 - 8ac > 0$$

が成り立つことであった．以下では，$D > 0$ を仮定する．

C と ℓ の相異なる 2 つの接点を $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha)),\ \mathrm{B}\beta, f(\beta))$ とすると，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S は，$\frac{1}{30}$ 面積公式[2] を用いて，

$$S = \left| \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\ dx \right| = \frac{|a|}{30}|\beta - \alpha|^5 \tag{1}$$

と計算できるのであった．複接線 ℓ の方程式を $y = \ell(x)$ とすると，仮定から，

$$f(x) - \ell(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \tag{2}$$

が成り立つが，x^3 の項の係数と，x^2 の項の係数を比較する事によって，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{2a}, \qquad \alpha\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{8a^2}$$

を得る．よってこれらから

$$|\beta - \alpha| = \sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \frac{\sqrt{D}}{2|a|}$$

が従う．これと，(1) 式を合わせることで次の公式が得られる．

命題. $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ (a \neq 0)$ とし，曲線 $C : y = f(x)$ が複接線 ℓ を持つとする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S について，次が成り立つ．

$$S = \frac{\sqrt{D}^5}{960a^4} \qquad (D := 3b^2 - 8ac)$$

注意. 4 次関数 $f(x)$ が複接線を持つ場合，その複接線はただ 1 つに決まる．よって，相異なる 2 つの接点も $f(x)$ のみによって決まり，$\frac{1}{30}$ 公式の形から，4 次曲線とその複接線で囲まれる部分の面積は，$f(x)$ のみによることが分かる．（上の命題において，接点の座標についての記述がないのはそのためである．）

さらに公式の形から，その面積は，$f(x)$ の 1 次以下の項の係数（すなわち d, e）には寄っていないこともわかる．これについて，定数項の値（e）が面積に影響を与えないのは，平行移動によって面積が不変であることから明らかである．1 次の項の係数（d）については，3 次の項の係数が 0 になるように，$f(x)$ を適当に平行移動させた時，1 次の項の係数と，複接線の傾きが一致することが分かる．よって，平行移動させた 4 次曲線に対して，(2) のような等式を考えたとき，1 次の項がそのままキャンセルされるのである[3]．このような考察により，1 次の項の係数が面積に影響を与えないこともわかる．

---

[1] https://gleamath.com/double-tangent-of-quartic-function/

[2] https://gleamath.com/one-thirtieth-formula01/

[3] 詳しくは，４次関数の対称性 https://gleamath.com/symmetry-of-quartic-function/ を参照．