$\frac{1}{12}$ 面積公式（三次曲線と接線）

命題 ($\frac{1}{12}$ **公式**)**.** 定数 α, β に対して，次が成り立つ．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx \ = \ -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\ dx \ = \ \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

証明．１つ目の等式は，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\alpha+\alpha-\beta)\ dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}\ dx \\
&= \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{(\beta-\alpha)}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4 \qquad = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4
\end{aligned}$$

２つ目も同様に計算できるが，次のようにして確認することもできる．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx = -\int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx = -\int_\alpha^\beta (x-\beta)^2(x-\alpha)\ dx$$

ここで２つ目の等号は，α と β の役割を入れ替えていることによる． □

注意. 上の公式は，その結果の形から $\frac{1}{12}$ 公式と呼ばれることが多い．放物線と二本の接線で囲まれる部分の面積を求める公式も $\frac{1}{12}$ 公式と呼ばれることがあるがそれは本稿のものとは違う．

$\frac{1}{12}$ 公式は，次のように言い換えることができる．

命題 ($\frac{1}{12}$ **公式**)**.** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ とする．三次曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線 ℓ が，接点とは異なる点 $(\beta, f(\beta))$ で C と交わっているとする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \ = \ \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

証明．接線 ℓ の方程式を $y=g(x)$ とすると，仮定から，

$$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

と因数分解できる．よって，求める面積 S は，$\frac{1}{12}$ 公式を用いることにより，右図のどの場合においても

$$S=\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx\right|=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

と計算できる． □