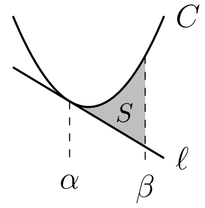
$\frac{1}{12}$ 面積公式（放物線と接線）

放物線とその接線において，接点を端点とする区間において，放物線と接線で囲まれる部分の面積は，$\frac{1}{3}$ 面積公式を用いて，簡単に計算できるのであった．[1]

命題 ($\frac{1}{3}$ 公式)．$f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．放物線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線を ℓ とする．このとき，直線 $x = \beta$ と放物線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \;=\; \frac{|a|}{3}|\beta - \alpha|^3$$



この $\frac{1}{3}$ 公式を二回用いることで，$\frac{1}{12}$ 公式[2] と呼ばれる別の公式を作ることができる．

命題 ($\frac{1}{12}$ 公式)．$f(x) = ax^2+bx+c$ とする．放物線 $C : y = f(x)$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ （ただし $\alpha < \beta$ とする）における接線をそれぞれ ℓ_α，ℓ_β とする．このとき，2 接線 ℓ_α，ℓ_β と放物線 C で囲まれる部分の面積 S について次が成り立つ．

$$S \;=\; \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

証明. まずは，下図でも示しているとおり，必ず，

x 座標において，２接線の交点が，２接点の真ん中に位置する

ことを証明する．[3] 2 接線 ℓ_α，ℓ_β の方程式はそれぞれ，

$$\ell_\alpha : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$
$$\ell_\beta : y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta)$$

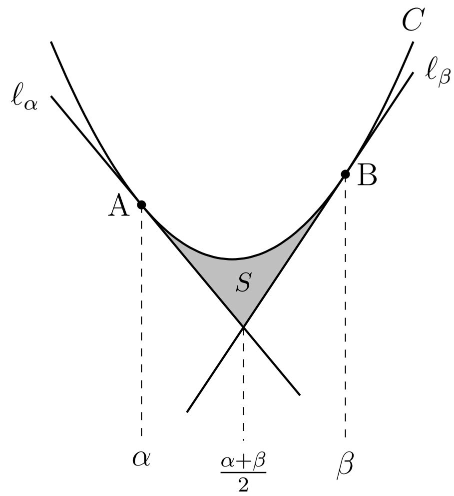
と書けるので，y を消去することで，x の等式

$$f(\beta) - f(\alpha) = -(f'(\beta) - f'(\alpha))x + \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha)$$
$$(f'(\beta) - f'(\alpha))x = \beta f'(\beta) - f(\beta) - \{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)\}$$

ここで，与えられた $f(x)$ の形から，$f'(x) = 2ax + b$ であり，$xf'(x) - f(x) = ax^2 + c$ であることに注意して，

$$2a(\beta - \alpha)x = a(\beta^2 - \alpha^2)$$
$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

が従う．



2 つの区間，$[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$，$[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ にそれぞれ，$\frac{1}{3}$ 公式を用いることで，求める面積 S は，

$$S = \frac{|a|}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 + \frac{|a|}{3}\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3 = \frac{2|a|}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

と計算できる． □

---

[1] 詳しくは，https://gleamath.com/one-twelfth-formula01

[2] 三次曲線とその接線で囲まれる部分の面積を求める公式も $\frac{1}{12}$ 公式と呼ばれることがあるが，本稿のものとは違う．

[3] これ自体も，かなり重要な性質である．