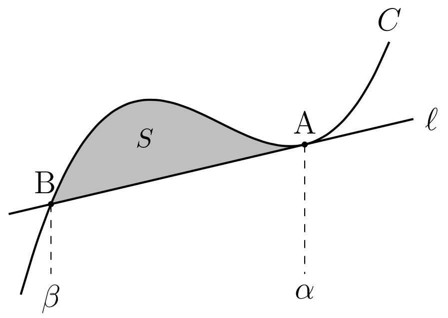
３次関数と接線で囲まれる部分の面積

３次関数とその接線で囲まれる部分の面積について考察する．



関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a \neq 0)$ を考える．曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ における接線 ℓ が，A とは異なる点 $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ で，曲線 C と交わっているとする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S は，$\frac{1}{12}$ 面積公式[1] を用いて，

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)\ dx \right| = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4 \tag{1}$$

と計算できるのであった．ここで，$f''(x) = 6ax + 2b$ から，$y = f(x)$ 上の変曲点の x 座標は，$x = -\frac{b}{3a}$ であり，３次関数の対称性[2] から，線分 AB を $1:2$ に内分する点の x 座標と，変曲点の x 座標が一致するので，

$$\frac{2\alpha+\beta}{3} = -\frac{b}{3a} \tag{2}$$

が成り立つ．よって，(1)，(2) を合わせて，

$$S = \frac{|a|}{12}\left(-2\alpha - \frac{b}{a} - \alpha\right)^4 = \frac{|a|}{12}\left(3\alpha + \frac{b}{a}\right)^4$$

が従う．これを命題の形でまとめておこう．

命題． $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a \neq 0)$ とし，曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ における接線を ℓ とする．このとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S について，次が成り立つ．

$$S = \frac{|a|}{12}\left(3\alpha + \frac{b}{a}\right)^4$$

とくに，$a = 1$，$b = 0$ なら，次が成り立つ．

$$S = \frac{27}{4}\alpha^4$$

注意． 上の記号を用いる．３次関数 $C : y = f(x)$ において，変曲点でない点における接線は，必ず，接点以外の点で C と交わる．なぜならば，接線を $\ell : y = h(x)$ とし，C と ℓ の共有点が接点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ の一点だけであると仮定すると，$f(x) - h(x) = a(x-\alpha)^3$ が成り立つが，x^2 の項の係数を比較することにより，$\alpha = -\frac{b}{3a}$ が得られ，これは変曲点の x 座標である．対偶を考えることにより，$\alpha \neq -\frac{b}{3a}$ なら，共有点は２つであると結論付けられるからである．上の公式は，A が変曲点，すなわち $\alpha = -\frac{b}{3a}$ である場合も成り立つ．この場合，囲まれる部分が存在しないため，$S = 0$ となる．

[1] https://gleamath.com/one-twelfth-formula01/
[2] https://gleamath.com/symmetry-of-cubic-function/