放物線

定義. 平面上で，定点 F と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点 P の軌跡を**放物線**という．また，定点 F をその放物線の**焦点**といい，定直線 ℓ を**準線**という．

放物線の方程式その 1

$p \neq 0$ とする．点 $\mathrm{F}(p, 0)$ を焦点とし，直線 $\ell : x = -p$ を準線とする放物線の方程式は，

$$y^2 = 4px$$

である．

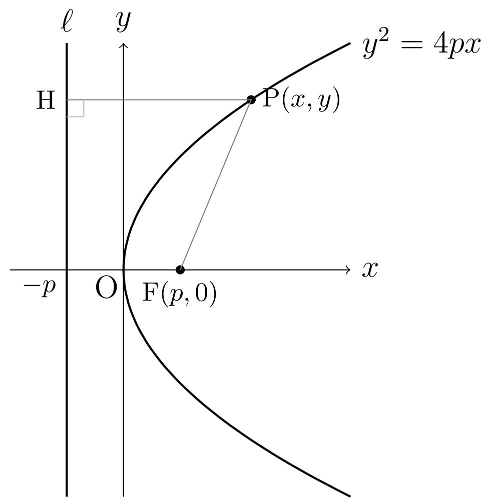
証明. 放物線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし，点 P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とする．
放物線の定義より，$\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$ なので，

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |\, x - (-p)\, |$$

が成り立つ．両辺を 2 乗して整理することで，

$$y^2 = 4px$$

を得る．



注意. 右図は，$p > 0$ の場合である．$p < 0$ の時は，右図を y 軸に関して，対称移動させた形（左に開いた放物線）となる．

□

放物線の方程式その 2

$q \neq 0$ とする．点 $\mathrm{F}(0, q)$ を焦点とし，直線 $\ell : y = -q$ を準線とする放物線の方程式は，

$$x^2 = 4qy$$

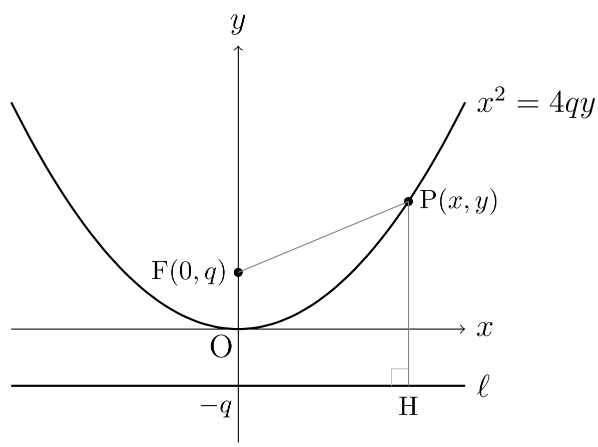
である．

証明は，上と同じなので省略するが，$q > 0$ の時は，下図のような放物線となる．

$a > 0$ として，$y = ax^2$ の形の放物線を考える．これは，頂点が原点で，下に凸な放物線であったから，ちょうど，右図のような放物線である．

$$y = ax^2 \iff x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a} y$$

と右図の放物線の方程式のような形に変形できることから，次が成り立つ．



放物線 $y = ax^2$ の，焦点は $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ であり，
準線は，直線 $y = -\dfrac{1}{4a}$ である．