ベクトルの平行

定義. $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトルが**平行である**とは，その向きが同じか反対であるときをいう．

ベクトルの実数倍の定義から，次が成り立つ．

> ベクトルの平行
>
> **定理.** $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ ，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ のとき，
>
> $$\overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{が平行} \quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}\text{となる実数}\,k\,\text{が存在する}$$

定義. $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \quad\Longleftrightarrow\quad s = t = 0$$

が成り立つとき，２つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**一次独立である**という．また，一次独立でないときを**一次従属である**という．

注意. 一次独立の定義において，($\Leftarrow$) は一般のベクトルに対しても成り立つことに注意する．よって，２つのベクトルが一次独立であることを示す際には，($\Rightarrow$) だけを示せば十分である．

命題. $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{は一次独立} &\quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{が平行でない} \\ \overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{は一次従属} &\quad\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{a}\text{と}\overrightarrow{b}\text{が平行} \end{aligned}$$

証明. $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ に対して，１つ目の主張のみを示せば十分である．

($\Leftarrow$) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行でないと仮定する．
$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとすると，$s\overrightarrow{a} = -t\overrightarrow{b}$ である．$t \neq 0$ とすると，$\overrightarrow{b} = -\dfrac{s}{t}\overrightarrow{a}$ と書けるが，これは，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行であるという仮定に矛盾である．よって，$t = 0$ であるが，これから，$s\overrightarrow{a} = -t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ となり，$\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ なので，$s = 0$ が従う．以上から，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は一次独立である．

($\Rightarrow$) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が一次独立であると仮定する．
$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行であるとする（背理法）と，$\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$ となる実数 k が存在する．（ここで，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ なので，$k \neq 0$ である．）よって，$-k\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = -k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ が成り立ち，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は一次独立なので，$-k = 1 = 0$ となるが，これは矛盾である．よって，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行でない．

□

次の命題は，ほとんど明らかであるが，次に説明するベクトルの分解の一意性の証明に必要である．

補題. $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が，一次独立である（平行でない）とする．このとき，次が成り立つ．

$$s_1\overrightarrow{a} + t_1\overrightarrow{b} = s_2\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b} \quad\Longleftrightarrow\quad s_1 = s_2\ ,\ t_1 = t_2$$

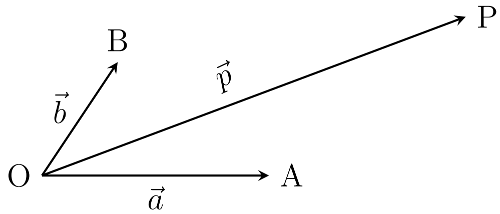
証明. $s_1\overrightarrow{a} + t_1\overrightarrow{b} = s_2\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b}$ とすると，$(s_1 - s_2)\overrightarrow{a} + (t_1 - t_2)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ が成り立つ．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の一次独立性から，$s_1 - s_2 = t_1 - t_2 = 0$ が成り立つ．よって，$s_1 = s_2$，$t_1 = t_2$ が成り立つ．逆は自明である．□

ベクトルの分解

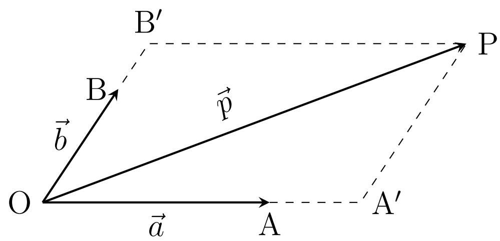
> ベクトルの分解
>
> **定理.** 平面上で，$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が一次独立である（平行でない）とする．このとき，任意のベクトル $\overrightarrow{p}$ は，
>
> $$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$
>
> と一意的に表すことができる．

証明. まず，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{p}$ の始点を合わせる．このとき，（ベクトルは位置を問題にしていないが）説明の都合上，次のように点に名前をつける．

- 点 O : 始点の集まった点,
- 点 A : $\overrightarrow{a}$ の終点,
- 点 B : $\overrightarrow{b}$ の終点,
- 点 P : $\overrightarrow{p}$ の終点,



点 P を通り直線 OB に平行な直線と，直線 OA の交点を A$'$ とし，点 P を通り直線 OA に平行な直線と，直線 OB の交点を B$'$ とする．



このとき，

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}'} + \overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$

が成り立つ．一方，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$ は平行なので，ある実数 s が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = s\overrightarrow{a}$ と書け，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ は平行なので，ある実数 t が存在して，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'} = s\overrightarrow{b}$ と書ける．以上から，任意のベクトル $\overrightarrow{p}$ は，$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ と表すことができる．
最後に一意性について，証明する．

$$\overrightarrow{p} = s_1\overrightarrow{a} + t_1\overrightarrow{b} = s_2\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b}$$

と 2 通りに表せたとする．$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は一次独立なので，前の補題より，$s_1 = s_2$，$t_1 = t_2$ が成り立つ．したがって，$\overrightarrow{p}$ の表し方は一意的である． □

注意. 空間内においては，一次独立なベクトルの定義を次のように拡張できる：
空間内において，$\overrightarrow{0}$ でない 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ が一次独立であるとは，

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + u\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = t = u = 0$$

が成り立つときをいう．

　しかし，平面上においては，上のように 3 つのベクトルが一次独立になることはない．なぜならば，定理（ベクトルの分解）から，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が一次独立なら，ある s, t が存在して，$\overrightarrow{c} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ と書けるので，$s \neq 0, t \neq 0$ だが，$-s\overrightarrow{a} - t\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つからである．このように，一般に次元よりも多くの一次独立なベクトルの組みは存在しないことがわかる．