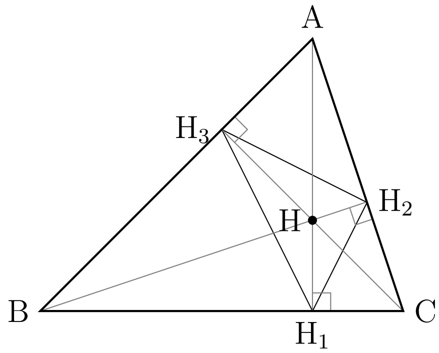
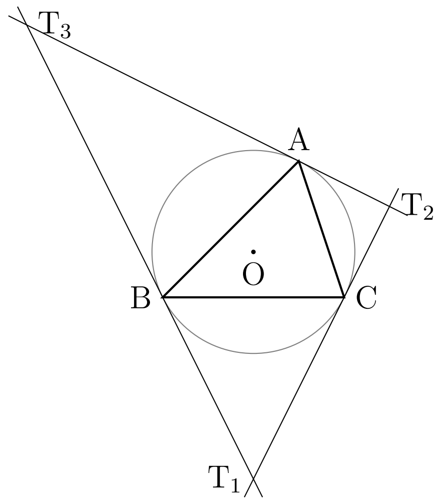
垂足三角形と相似な三角形

3つの三角形を定義し，それらが相似であることを示す．

定義. 鋭角三角形 ABC において，

- 頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ，$\mathrm{H_1, H_2, H_3}$ とする．$\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}$ を $\triangle$ABC の**垂足三角形**といい，以下では，$\triangle\mathcal{H}$ で表す．
- 外接円の頂点 A, B, C における接線をそれぞれ $\ell_{\mathrm{A}}, \ell_{\mathrm{B}}, \ell_{\mathrm{C}}$ とし，ℓ_{B} と ℓ_{C}，ℓ_{C} と ℓ_{A}，ℓ_{A} と ℓ_{B} の交点をそれぞれ，$\mathrm{T_1, T_2, T_3}$ とする．$\triangle\mathrm{T_1T_2T_3}$ を以下では，$\triangle\mathcal{T}$ で表す．
- 頂角 A, B, C 内の傍心をそれぞれ，$\mathrm{I_A, I_B, I_C}$ とし，これらを中心とする傍接円もまた同じ記号で表す．傍接円 $\mathrm{I_B}$ と $\mathrm{I_C}$，$\mathrm{I_C}$ と $\mathrm{I_A}$，$\mathrm{I_A}$ と $\mathrm{I_B}$ の外側共通接線（4本の共通接線のうち，$\triangle$ABC の各辺の延長線でないもの．）をそれぞれ，$\ell'_{\mathrm{A}}, \ell'_{\mathrm{B}}, \ell'_{\mathrm{C}}$ とし，ℓ'_{B} と ℓ'_{C}，ℓ'_{C} と ℓ'_{A}，ℓ'_{A} と ℓ'_{B} の交点をそれぞれ，$\mathrm{E_1, E_2, E_3}$ とする．$\triangle\mathrm{E_1E_2E_3}$ を $\triangle$ABC の**傍接円の外側共通接線で定まる三角形**と呼び，以下では，$\triangle\mathcal{E}$ で表す．





命題. 3つの三角形 $\triangle\mathcal{H}$，$\triangle\mathcal{T}$，$\triangle\mathcal{E}$ の対応する各辺はそれぞれ平行であり，これらの三角形は相似である．

証明．まずは，$\triangle\mathcal{H}$ と $\triangle\mathcal{T}$ の対応する各辺が平行であることを示す．どれも同じなので，辺 $\mathrm{H_2H_3}$ と辺 $\mathrm{T_2T_3}$ が平行であることを示す．四角形 $\mathrm{AH_2HH_3}$ が円に内接するので，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{T_2AC} &= \angle\mathrm{B} && \text{（接弦定理）}\\ &= 90^\circ - \angle\mathrm{H_3AH_1}\\ &= \angle\mathrm{AHH_3}\\ &= \angle\mathrm{AH_2H_3} && \text{（円周角の定理）}\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，辺 $\mathrm{H_2H_3}$ と辺 $\mathrm{T_2T_3}$ の錯角が等しいため，これらは平行である．
次に，$\triangle\mathcal{T}$ と $\triangle\mathcal{E}$ の対応する各辺が平行であることを示す．どれも同じなので，辺 $\mathrm{T_2T_3}$ と辺 $\mathrm{E_2E_3}$ が平行であることを示す．辺 AC の延長線と，辺 $\mathrm{E_2E_3}$ の交点を D とする．辺 BC の延長線と辺 $\mathrm{E_2E_3}$ はどちらも，傍接円 $\mathrm{I_C, I_B}$ の共通接線なので，上の議論と合わせて，

$$\angle\mathrm{E_2DC} = \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{T_2AC}$$

が成り立つ．よって，辺 $\mathrm{T_2T_3}$ と辺 $\mathrm{E_2E_3}$ の同位角が等しいため，これらは平行である． □