順列

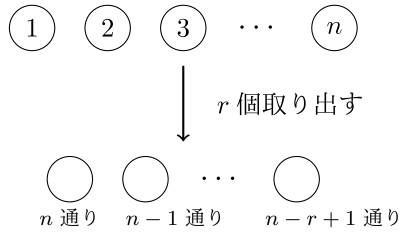
定義. 異なる n 個のものから r 個取り出して1列に並べたのを，**n 個から r 個とる順列**といい，その総数（場合の数）を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．（$0 < r \leqq n$）

注意. 上の定義において，「取り出して並べる」とは，「1個ずつ順番に取り出す」と同じことである．当然，取り出す順番が変われば，（最終的に同じものを取り出していたとしても，）違う場合として考える．

n 個から r 個とる順列の総数について，次が成り立つ．

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad ※\ r \text{ 個の数の積}$$

証明. n 個のものから，1個ずつ順々に取り出していき，取り出したものを並べていく．
1つめの取り出し方は，n 通りであり，
2つめの取り出し方は，1つ減って，
$n-1$ 個から取り出すので，$n-1$ 通りである．
同様に考えて，r 個目の取り出し方は，
n 個から $r-1$ 個減っているので，
$n-(r-1) = n-r+1$ 通りである．
以上より，主張が従う．



□

定義. ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ と定義する．

例. 7個のものから，3個とる順列の総数は，${}_7\mathrm{P}_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$（通り）である．

定義. 1から n までの自然数の積を **n の階乗**といい $n!$ で表す．すなわち，

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

である．

定義. $0! = 1$ と定義する．

例. n 個のものから，n 個とる順列の総数は，${}_n\mathrm{P}_n$ であるが，これは $n!$ に他ならない．なぜならば，定義から，

$${}_n\mathrm{P}_n \quad = \quad n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \quad = \quad n!$$

が成り立つからである．
例えば，5個のものから，5個とる順列の総数は，${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$（通り）である．

命題. ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ が成り立つ．

証明. ${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 1}{(n-r)\cdots 1} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ ． □