同じものを含む順列

順列では，n 個の異なるものから r 個取り出して並べる並べ方の総数を考えていた．ここでは，この n 個のものに同じものが含まれている場合を考える．

具体例から考えよう：Ⓐ, Ⓐ, Ⓐ, Ⓐ, Ⓑ, Ⓑ, Ⓑ, Ⓒ, Ⓒ のように，A と書かれた玉４つと，B と書かれた玉３つと，C と書かれた玉２つの合計９個の玉を並べる並べ方の総数を考える．

- 組合せを用いた考え方．
  下のように空の箱を９つ用意する．

このうち，まずは，Ⓐ の玉４つを入れる場所を決める：${}_9\mathrm{C}_4 = \dfrac{9!}{4!(9-4)!}$ 通り．

	Ⓐ		Ⓐ			Ⓐ	Ⓐ	

次に，Ⓑ の玉３つを入れる場所を決める：${}_5\mathrm{C}_3 = {}_{9-4}\mathrm{C}_3 = \dfrac{(9-4)!}{3!(9-4-3)!}$ 通り．

	Ⓐ	Ⓑ	Ⓐ		Ⓑ	Ⓐ	Ⓐ	Ⓑ

最後に，Ⓒ の玉２つを残りの場所に入れる：${}_2\mathrm{C}_2 = {}_{9-4-3}\mathrm{C}_2 = \dfrac{(9-4-3)!}{2!(9-4-3-2)!}$ 通り．

Ⓒ	Ⓐ	Ⓑ	Ⓐ	Ⓒ	Ⓑ	Ⓐ	Ⓐ	Ⓑ

以上より，求める総数は，$0! = 1$ に注意して，

$$ {}_9\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 = \frac{9!}{4!\cancel{(9-4)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-4)!}}{3!\cancel{(9-4-3)!}} \cdot \frac{\cancel{(9-4-3)!}}{2!(9-4-3-2)!} = \frac{9!}{4!3!2!} $$

を得る．

- 順列を用いた考え方．
  ９つの玉を，A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, C1, C2 のように一旦違うものとして考えると，その順列の総数は，${}_9\mathrm{P}_9 = 9!$ 通りである．しかし実際には，

  - A1, A2, A3, A4 は同じものなので，Ⓐ に関しては，${}_4\mathrm{P}_4 = 4!$ 通り，
  - B1, B2, B3 は同じものなので，Ⓑ に関しては，${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$ 通り，
  - C1, C2 は同じものなので，Ⓒ に関しては，${}_2\mathrm{P}_2 = 2!$ 通り

  ずつ同じものを数えていることになる．よって，求める総数は，

$$ \frac{{}_9\mathrm{P}_9}{{}_4\mathrm{P}_4 \cdot {}_3\mathrm{P}_3 \cdot {}_2\mathrm{P}_2} = \frac{9!}{4!3!2!} $$

通りである．

一般的には次が成り立つ．

A_1 と書かれた玉が p_1 個，A_2 と書かれた玉が p_2 個，$\cdots$，A_m と書かれた玉が p_m 個の合計 $n=p_1+p_2+\cdots+p_m$ の玉があるとする．これら n 個を並べて作った順列の総数は，

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_m)!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}.$$

証明．具体例で紹介した 2 つの考え方のうち，順列を使う方法ではほとんど明らかなので，組合せの考え方を用いて証明しよう．項数 m に関する帰納法で証明する．

- $m=2$ のときは，$n=p_1+p_2$ 個の箱に A_1 と書かれた玉 p_1 個の入れる場所の決め方が，${}_n\mathrm{C}_{p_1}$ 通りであり，残った箱に A_2 と書かれた玉を入れれば良いので，これは 1 通りである．以上から，求める総数は，${}_n\mathrm{C}_{p_1}=\dfrac{n!}{p_1!(n-p_1)!}=\dfrac{n!}{p_1!p_2!}$ となり，この場合は良い．
- $m=k$ のとき，上が成り立つと仮定して，$m=k+1$ のときを考える．
一旦，A_k と書かれた p_k 個の玉と，A_{k+1} と書かれた p_{k+1} 個の玉を同じ玉と考え，これらを B と書かれた $b=p_k+p_{k+1}$ 個の玉と考える．k 種類の玉 $A_1,A_2,\cdots,A_{k-1},B$ に帰納法の仮定を適用すると，これらの順列の総数は，
$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_{k-1}!b!}=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}+b)!}{p_1!p_2!\cdots p_{k-1}!b!}$$
である．しかし，実際には，B と書かれた玉は，A_k と書かれた玉と，A_{k+1} と書かれた玉であり，上で考えたそれぞれ順列において，$b=p_k+p_{k+1}$ 個の B の玉に着目し，その位置（B の玉が入った箱）について，A_k と書かれた p_k 個の玉と，A_{k+1} と書かれた p_{k+1} 個の玉の順列を考えなければならないが，これは，$m=2$ の場合と同様に考えて，$\dfrac{b!}{p_k!p_{k+1}!}=\dfrac{(p_k+p_{k+1})!}{p_k!p_{k+1}!}$ 通りである．以上より，求める順列の総数は，
$$\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}+b)!}{p_1!p_2!\cdots p_{k-1}!b!}\cdot\frac{b!}{p_k!p_{k+1}!}=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}+p_k+p_{k+1})!}{p_1!p_2!\cdots p_{k-1}!p_k!p_{k+1}!}$$
となり，$m=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，主張が従う．□

次に並べるものが n 個全てではなく，r 個（$r<n$）の場合を証明する．

上と同じ状況で，m 種類 n 個の玉のうち r 個を選んで並べて作った順列の総数は，

$$\sum_{(p'_1,p'_2,\cdots,p'_m)}\frac{r!}{p'_1!p'_2!\cdots p'_m!}=\sum_{(p'_1,p'_2,\cdots,p'_m)}\frac{(p'_1+p'_2+\cdots+p'_m)!}{p'_1!p'_2!\cdots p'_m!}$$

である．ただし，和 $\sum$ は，$r=p'_1+p'_2+\cdots+p'_m$ であり，各 $i=1,2,\cdots,m$ に対して，$0\leq p'_i\leq p_i$ を満たす全ての組み $(p'_1,p'_2,\cdots,p'_m)$ をわたるものとする．

証明．取り出す r 個の内訳を，A_1 と書かれ玉が p'_1 個，$\cdots$，A_m と書かれ玉が p'_m 個とする．すなわち，$r=p'_1+p'_2+\cdots+p'_m$ であり，各 $i=1,2,\cdots,m$ に対して，$0\leq p'_i\leq p_i$ とする．このような r 個を並べる順列の総数には，上の結果が適用できるので，$\dfrac{r!}{p'_1!p'_2!\cdots p'_m!}$ 通りである．さらにこのような r 個の選び方は，$r=p'_1+p'_2+\cdots+p'_m$ を満たす組 $(p'_1,p'_2,\cdots,p'_m)$ の数だけあり，これらの場合は互いに同時には起こり得ない．よって，和の法則を用いて結果が従う．□