点と座標

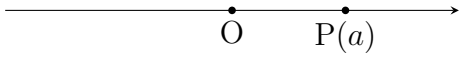
直線上の点

数直線上の点と実数を対応させる[1]．

定義. 点 P に実数 a が対応するとき，a を点 P の**座標**といい，$\mathrm{P}(a)$ と表す．

原点 O と，点 $\mathrm{P}(a)$ の間の距離は，

$$\mathrm{OP} = |a|$$

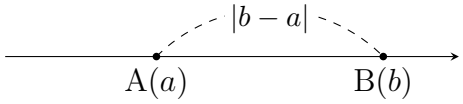


であり，２点 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)$ の間の距離は，

$$\begin{aligned} &a \leq b \text{ のとき} \quad && \mathrm{AB} = b - a, \\ &a > b \text{ のとき} \quad && \mathrm{AB} = a - b \end{aligned}$$

なので，まとめて次のように書ける：

$$\mathrm{AB} = |b - a| = |a - b|.$$



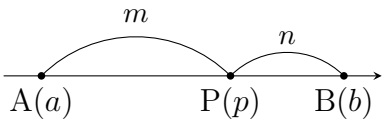
次に内分点と外分点の座標についての結果を紹介する．

直線上の内分点と外分点の座標

２点 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)$ に対して，

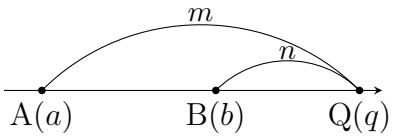
- 線分 AB を $m : n$ に内分する点 $\mathrm{P}(p)$ の座標は

$$p = \frac{na + mb}{m + n},$$



- 線分 AB を $m : n$ に外分する点 $\mathrm{Q}(q)$ の座標は

$$q = \frac{-na + mb}{m - n}$$



と表せる[a]．

[a]外分点に関する右図は $m > n$ の場合である．$m < n$ の場合，点 Q は点 A の左側に位置する．

証明. 内分の公式を示す．仮定より，$|p - a| : |p - b| = m : n$ なので，$m|p - b| = n|p - a|$ が成り立つ．ここで，$p - a$ と $p - b$ は異符号であるから，

$$m(p - b) = -n(p - a) \iff (m + n)p = na + mb$$

となり，これから結果が従う．外分の公式を示す．上と同様に，$m|q - b| = n|q - a|$ が成り立つが，$q - a, q - b$ は同符号であるから，

$$m(q - b) = n(q - a) \iff (m - n)p = -na + mb$$

となり，これから結果が従う． □

注意. ２点 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)$ の中点を $\mathrm{M}(m)$ とする．点 M は，線分 AB を $1 : 1$ に内分する点と考えると，内分点の公式からその座標は，$m = \dfrac{a + b}{2}$ と求められる．

[1]数直線上に原点 O と，もう一つの点 E を定め，線分 OE の長さを 1 と定める．点 O と点 E にそれぞれ，数 $0, 1$ を対応させる．原点 O からみて，点 E と同じ側にある点を P とする．線分 OE の長さ 1 を基準とした時，線分 OP の長さが，数直線上の点 P に対応する実数である．これを（すなわち線分 OP の長さを）a とする．原点 O からみて，点 E と反対側にある点であって，点 O からの長さが a である点を Q とするとき，この点 Q に対応する実数を $-a$ とする．このような対応が実数を数直線上に表すという事である．

平面上の点

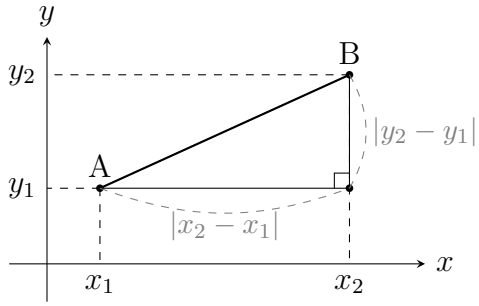
点 O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ をとる．
2 点 A, B の距離は，三平方の定理から，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

と求められる．特に原点からの距離は，

$$\mathrm{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

と表される．



次に内分点と外分点の座標を求めよう．

平面上の内分点と外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ に対して，

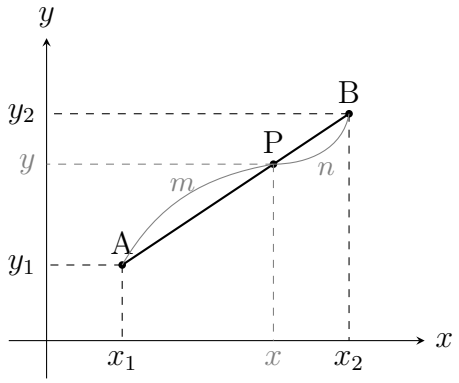
- 線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

- 線分 AB を $m : n$ に外分する点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$$

と表せる[a]．



[a] 右図は内分点の場合の図である．

証明. 内分点の x 座標だけ証明する．
3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，P を，x 軸に射影した点をそれぞれ

$$\mathrm{A}'(x_1, 0),\ \mathrm{B}'(x_2, 0),\ \mathrm{P}'(x, 0)$$

とする．また，右図のように，点 C，D を定める．
△APC と △ABD は相似であるから，

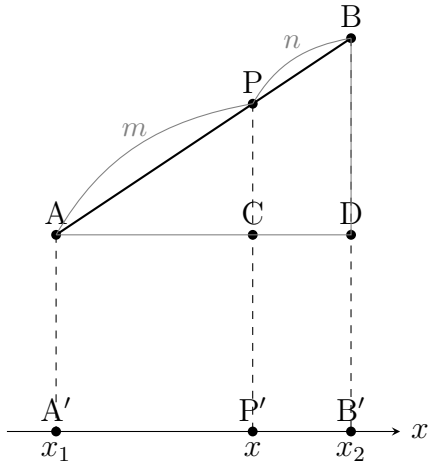
$$\mathrm{AC} : \mathrm{AD} = \mathrm{AP} : \mathrm{AB} = m : m+n$$

が成り立つ．よって，

$$\mathrm{A'P'} : \mathrm{B'P'} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD} = m : n$$

であり，直線上の内分点の公式から，

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$



が従う．y 座標に関しても y 軸への射影を考えれば良く．外分点の公式についても同様である．

□