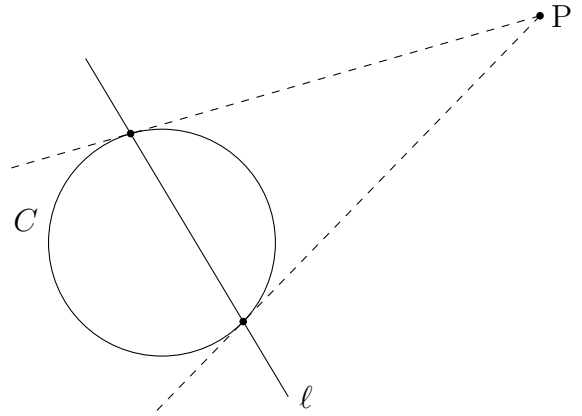
極線と極

定義. 円 C の外部に点 P があるとする．このとき，点 P から円 C に引いた 2 本の接線の接点を通る直線 ℓ のことを**点 P に対する円 C の極線**（または**円 C に対する点 P の極線**）という．また点 P のことを**極**という．



極線の方程式を求める前に，円の接線の方程式に関する公式を思い出そう．

円の接線の方程式

円 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2. \tag{1}$$

この事実を用いて極線の方程式を求めるが，証明の前に，上の (1) 式と次に述べる (2) 式の形を比べてみてほしい．考えている点が，円周上の場合と，円の外部の場合とで異なるものの，それらの方程式の形が同じであるというに驚くだろう．

極線の方程式

点 $\mathrm{P}(p, q)$ に対する円 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の極線の方程式は

$$(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2. \tag{2}$$

証明. 点 P から，円 C に引いた 2 つの接線 ℓ_1, ℓ_2 の接点をそれぞれ (x_1, y_1)，(x_2, y_2) とすると，2 本の接線の方程式は，次のように書ける．

$$\ell_1 : (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2,$$

$$\ell_2 : (x_2 - a)(x - a) + (y_2 - b)(y - b) = r^2.$$

仮定から，点 P は，2 本の接線の交点なので，

$$\begin{cases} (x_1 - a)(p - a) + (y_1 - b)(q - b) &= r^2 \\ (x_2 - a)(p - a) + (y_2 - b)(q - b) &= r^2 \end{cases} \tag{3}$$

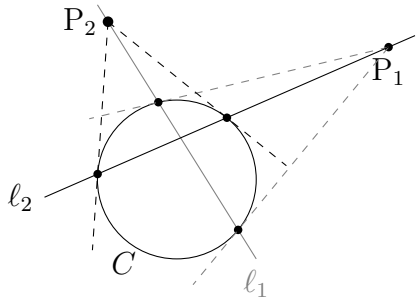
が成り立つ．ここで，直線

$$\ell : (x - a)(p - a) + (y - b)(q - b) = r^2$$

を考える．(3) 式より，2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) は，ℓ 上の点であることが分かる．よって，ℓ が，点 P に対する円 C の極線の方程式である． □

次に極線に関する２つの定理を紹介する．

定理. 点 P_1 に対する円 C の極線を ℓ_1 とする．このとき，ℓ_1 上の任意の点 P_2 に対する円 C の極線 ℓ_2 は，点 P_1 を通る．ただし，２点 P_1，P_2 は，円 C の外部にあるとする．



証明. 点 $\mathrm{P}_1(p_1, q_1)$ に対する円 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の極線 ℓ_1 の方程式は

$$\ell_1 : (p_1 - a)(x - a) + (q_1 - b)(y - b) = r^2 \tag{4}$$

と書ける．ℓ_1 上に任意の点 $\mathrm{P}_2(p_2, q_2)$ をとると，(4) 式から，

$$(p_1 - a)(p_2 - a) + (q_1 - b)(q_2 - b) = r^2 \tag{5}$$

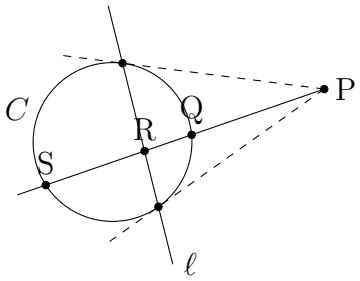
が成り立つ．一方，点 P_2 に対する円 C の極線 ℓ_2 の方程式は

$$\ell_2 : (p_2 - a)(x - a) + (q_2 - b)(y - b) = r^2$$

と書け，(5) 式より，$\mathrm{P}_1(p_1, q_1)$ が ℓ_2 上の点であることが従う． □

定理. 点 P に対する円 C の極線を ℓ とする．右図のように，点 P を通り，円 C と２点で交わる直線を引き，その交点をそれぞれ，Q，S とする．直線 PS と極線との交点を R とする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{PS} \cdot \mathrm{QR} = \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RS}$$



証明. 点 P から円 C に引いた接線の接点をそれぞれ A，B とする．右下図のように，点 A の周りの４つの角を，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると，接弦定理を用いて，点 B の周りの４つの角，$\beta, \alpha, \delta, \gamma$ が右下図のように定まる．△PAQ の面積は，$\frac{1}{2}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AQ} \sin\delta$ であるが，一方，直線 PS と点 A との距離を h とすると，$\frac{1}{2}h \cdot \mathrm{PQ}$ とも書ける．この２式から，

$$h \cdot \mathrm{PQ} = \mathrm{AP} \cdot \mathrm{AQ} \sin\delta$$

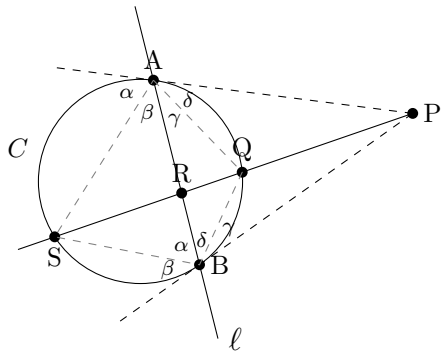
が成り立つ．$\sin(\beta + \gamma + \delta) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ に注意すると，同様にして，

$$h \cdot \mathrm{RS} = \mathrm{AR} \cdot \mathrm{AS} \sin\beta \quad , \quad h \cdot \mathrm{PS} = \mathrm{AP} \cdot \mathrm{AS} \sin\alpha \quad , \quad h \cdot \mathrm{QR} = \mathrm{AQ} \cdot \mathrm{AR} \sin\gamma$$

が成り立つので，以上の４式から，等式，$\dfrac{\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RS}}{\mathrm{PS} \cdot \mathrm{QR}} = \dfrac{\sin\delta \sin\beta}{\sin\alpha \sin\gamma} =: X$ を得る．

次に，直線 PS と点 B との距離を h' とし，△PBQ，△RBS，△PBS，△QBR を考えることによって，上と同様にして，

$$h' \cdot \mathrm{PQ} = \mathrm{BP} \cdot \mathrm{BQ} \sin\gamma \quad , \quad h' \cdot \mathrm{RS} = \mathrm{BR} \cdot \mathrm{BS} \sin\alpha$$
$$h' \cdot \mathrm{PS} = \mathrm{BP} \cdot \mathrm{BS} \sin\beta \quad , \quad h' \cdot \mathrm{QR} = \mathrm{BQ} \cdot \mathrm{BR} \sin\delta$$



が得られ，これから，$\dfrac{\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RS}}{\mathrm{PS} \cdot \mathrm{QR}} = \dfrac{\sin\gamma \sin\alpha}{\sin\beta \sin\delta} = \dfrac{1}{X}$ を得る．

以上から，$X = \dfrac{1}{X}$ が成り立つが，$X > 0$ なので，$\dfrac{\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{RS}}{\mathrm{PS} \cdot \mathrm{QR}} = X = 1$ が従う．

□