極線と接線

本稿では，極線[1] の方程式と円の接線の方程式が同じ形をしていることについて，ベクトルを使って考察する．まず，２つの方程式を復習しておく．

極線の方程式

点 $\mathrm{P}(p,q)$ に対する円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の極線の方程式は

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2. \tag{1}$$

円の接線の方程式

円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式は

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2. \tag{2}$$

まずは，極線の方程式を求めよう．
点 $\mathrm{P}(p,q)$ に対する円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の極線を ℓ とし，円 C の中心を $\mathrm{A}(a,b)$ とし，接点のひとつを T とする．極線上の任意の点を $\mathrm{Q}(x,y)$ として，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を考えると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}} && (\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\text{の直線 AP 上への正射影を考えている} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}} && (\overrightarrow{\mathrm{AP}}\text{の直線 AT 上への正射影を考えている}) \\
&= |\,\overrightarrow{\mathrm{AT}}\,|^2 && =r^2
\end{aligned}$$

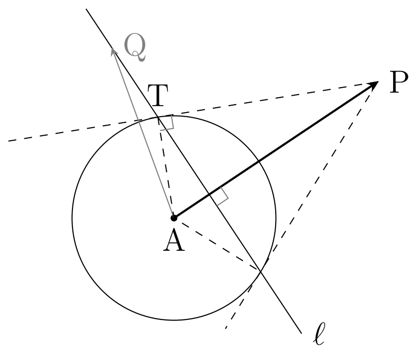
が成り立つ．一方，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(p-a,q-b) \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(x-a,y-b)$$

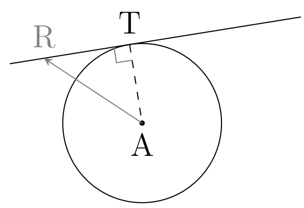
と成分表示できるので，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= (p-a,q-b)\cdot(x-a,y-b) \\
&= (p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上を合わせて，極線の方程式を得る．



次に接線の方程式を求めよう．
極線の場合と同様に，ベクトルの正射影を考えれば良い．接点の座標を $\mathrm{T}(x_0,y_0)$ として，接線上の任意の点を $\mathrm{R}(x,y)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ の直線 AT 上への正射影を考えることで，次が従う．



$$\begin{aligned}
(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b) &= (x_0-a,y_0-b)\cdot(x-a,y-b) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}} = |\,\overrightarrow{\mathrm{AT}}\,|^2 = r^2
\end{aligned}$$

２つの方程式をベクトルを用いて証明したが，どちらの場合も，直線 AT 上への正射影を考えている点が共通している．改めて同型である２つの方程式の形を見ると，点 A を基準として，定点と動点の内積が一定[2]（$=r^2$）という形をしていることに気づくだろう．考えている円 C は同じものであるから，２つの方程式が同型である理由はここにあると理解できる．

[1]円 C の外部に点 P があるとする．このとき，点 P から円 C に引いた２本の接線の接点を通る直線のことを**点 P に対する円 C の極線**（**または円 C に対する点 P の極線**）という．また点 P のことを**極**という．

[2]点と点の内積とは正確な言い方ではないが，ベクトルの成分表示と点を同一視していることに注意する．