内分点と外分点の位置ベクトル

平面上の 2 点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ に対して,

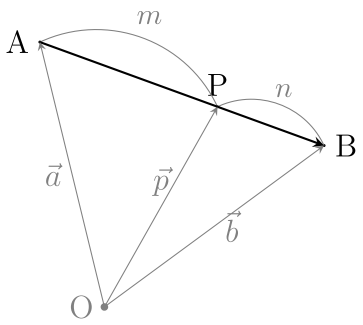
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a} \tag{1}$$

と表せるのであった．線分 AB の内分点や外分点の位置ベクトルについて，次が成り立つ．

> 平面上の 2 点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ に対して，線分 AB を
>
> - $m:n$ に内分する点を P$(\vec{p})$ とすると，
>
> $$\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}, \qquad \left(\text{特に，点 P が中点なら，}\quad \vec{p} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\right)$$
>
> - $m:n$ に外分する点を Q$(\vec{q})$ とすると，
>
> $$\vec{q} = \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n},$$
>
> が成り立つ．

証明．点 P は，線分 AB を $m:n$ に内分する点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



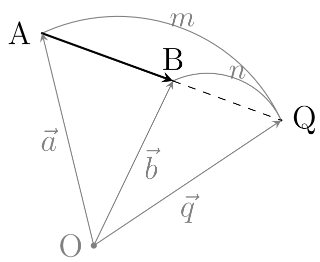
が成り立つ．これと，公式 (1) から，

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{p} = \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

が従う．

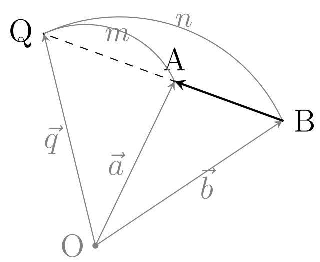
点 Q は，線分 AB を $m:n$ に外分する点なので，
$m > n$ のときは，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



が成り立ち，$m < n$ のときも，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$



が成り立つ．よってどちらの場合も公式 (1) から，

$$\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

が従う． □