整数係数の方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_0 a_n \neq 0)$$

が有理数解を持てば，それは，

$$\pm\frac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$$

の形である．

証明．方程式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つとする．ここで，$a_i \in \mathbb{Z} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，$a_0 a_n \neq 0$ とし，$p \neq 0$ であり，p, q は互いに素とする．

$$a_n \left(\frac{q}{p}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{q}{p}\right) + a_0 = 0$$

が成り立つので，両辺に p^n を掛けることで，等式

$$a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1}p + \cdots + a_1 q p^{n-1} + a_0 p^n = 0 \tag{1}$$

を得る．よって，等式

$$q(a_n q^{n-1} + a_{n-1}q^{n-2}p + \cdots + a_1 p^{n-1}) = -a_0 p^n$$

が成り立つが，p と q は互いに素であったので，a_0 は q で割れる．すなわち，q は，a_0 の約数である．再び，等式 (1) から，等式

$$a_n q^n = -p(a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 q p^{n-2} + a_0 p^{n-1})$$

が成り立つが，p と q は互いに素であったので，a_n は p で割れる．すなわち，p は，a_n の約数である．以上より，結果がしたがう． □

上の結果を知っていると次のように因数分解に役立つ事がある．

例． $2x^3 - 5x^2 + 1$ を因数分解してみよう．
上の結果から，$2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ が有理数解を持つとすれば，その可能性は，

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}$$

である事が分かる．代入する事より，$x = \dfrac{1}{2}$ が解の一つである事が分かるので，因数定理より，$2x^3 - 5x^2 + 1$ は，$2x - 1$ を因数に持つ事が分かる．整式の割り算から，

$$2x^3 - 5x^2 + 1 = (2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$$

と因数分解できる．